درس دوم

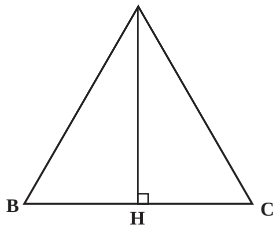
مساحت و کاربردهای آن

اهداف درس دوم

۱ یادآوری روش محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌ها شامل مثلث، مربع و مستطیل و ... .
۲ آشنایی با روش محاسبهٔ مساحت چهارضلعی‌های دارای دو قطر عمود برهم.
۳ آشنایی با برخی ویژگی‌ها و نکات در مقایسهٔ مساحت دو یا چند مثلث و یا چهارضلعی.
۴ استفاده از ویژگی‌ها و نکات و شکل‌های هم‌مساحت برای محاسبهٔ مساحت برخی شکل‌ها و حل مسائل.
۵ استفاده از مساحت جهت استدلال برای اثبات برخی از ویژگی‌ها و نکات.
۶ آشنایی با نقاط و چندضلعی‌های شبکه‌ای.
۷ آشنایی با روش محاسبهٔ چندضلعی‌های شبکه‌ای.
۸ آشنایی با فرمول پیک برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای و شکل‌های نامنظم هندسی

روش تدریس درس دوم

درس دوم با یادآوری روش محاسبهٔ مساحت مثلث و چهارضلعی‌های مطرح شده در درس اول شامل مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع و لوزی و ذوزنقه آغاز می‌شود. دانش‌آموز در دوره ابتدایی و دوره متوسطه اول با این مطالب آشنا شده است. کار در کلاس این صفحه نیز به نوعی یادآوری مطالبی است که دانش‌آموز در پایه نهم آن را خوانده است که قسمت اول آن مجدداً استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها در اثبات برخی از ویژگی‌هاست. مانند :



$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{ACH}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = CH \rightarrow & \text{در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \rightarrow & \text{در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان نیمساز است.} \end{cases}$$

ــ و سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث رابطهٔ $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و قراردادن آن در فرمول مساحت مثلث رابطهٔ $S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ به‌راحتی به‌دست می‌آید.

در فعالیت اول این درس داریم :

$$\left.\begin{array}{l} S_{ADB}=\frac{۱}{۲}BD\times AH \\ S_{DBC}=\frac{۱}{۲}BD\times CH \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD}=S_{ADB}+S_{DBC}=\frac{۱}{۲}BD\times AH+\frac{۱}{۲}BD\times CH=$$

$$=\frac{۱}{۲}BD(AH+CH)=\frac{۱}{۲}BD\times AC=\text{نصف حاصل ضرب قطرها}$$

و نتیجه مطلوب برای تأکید در کادر رنگی زیر فعالیت مطرح می‌گردد.

ــ قسمت کاربردهایی از مساحت با یادآوری دو ویژگی که در فصل دوم (قضیه تالس) مطرح شده بود آغاز می‌گردد و کار در کلاس زیر آن نیز به نوعی دست‌ورزی برای استفاده از این ویژگی‌ها برای اثبات برابری مساحت‌های دو مثلث ایجاد شده با رسم یکی از میانه‌های هر مثلث دلخواه می‌باشد. برای حل این کار در کلاس کافی است ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم کنیم. AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است و چون BM = CM است پس دو مثلث دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند پس مساحت‌های برابری دارند. برای هر نقطه دلخواه مانند F روی میانهٔ AM نیز می‌توان به همین شیوه استدلال نمود.

ــ فعالیت دوم این درس با استفاده از عکس قضیه تالس و ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع که در فصل دوم و نیز در درس قبلی بیان شده‌اند به ارائه یک مطلب از کاربردهای مساحت می‌پردازد. می‌توان از روش زیر استفاده نمود :

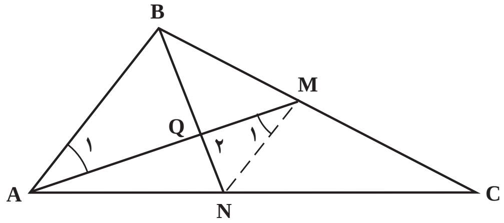
$$\frac{AP}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{قضیه تالس}]{\text{طبق عکس}} PN\parallel BC$$

و به همین شیوه می‌توان ثابت نمود که $PM\parallel AC$ و $MN\parallel AB$ است.

ــ بنابراین چهارضلعی‌های APMN و BPNM و PNCM متوازی‌الاضلاع هستند و در درس گذشته و سال‌های قبل دیدیم که قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند. بنابراین با انجام این فعالیت نتیجه متعاقب آن به راحتی قابل درک خواهد شد.

ــ فعالیت سوم این درس با استفاده از ویژگی میانه‌ها و استفاده از قضیه تالس با پرسش‌های متوالی و توسعه سطح آگاهی‌ها و اطلاعات قبلی دانش‌آموز به ارائه مطلبی مهم می‌پردازد که لازم است چرایی مرحله به مرحلهٔ این فعالیت برای دانش‌آموزان توضیح داده شود تا دانش‌آموز به جای حفظ و به‌خاطرسپاری ویژگی، آن را درک

نماید. روش اول به آسانی با پیگیری فعالیت قابل درک است و روش دوم به‌صورت زیر می‌باشد.



$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CA}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow MN\parallel BC \qquad \begin{cases}\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \text{مورب}\quad AM\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۱=\hat{A}_۱\\ \hat{G}_۱=\hat{G}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow C\overset{\Delta}{M}N\cong A\overset{\Delta}{B}G\Rightarrow\frac{GM}{AG}=\frac{GN}{BG}=\frac{MN}{AB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{GM}{AM}=\frac{GN}{BN}=\frac{۱}{۳}$$

در مورد میانهٔ وارد بر ضلع AB نیز می‌توان به همین شیوه عمل نمود.

و بعد از نتیجه گیری بیان شده، دانش‌آموز با استفاده از آنچه در کار در کلاس اول این درس آموخته است و با یک نام‌گذاری سادهٔ x و y و z و مساوی قرار دادن مساحت‌های دو مثلث هم‌نهشت به این نتیجه خواهد رسید که وقتی میانه‌های وارد بر اضلاع هر مثلث دلخواهی را رسم کند مثلث به ۶ مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌شود. یعنی ۶ مثلث ایجاد شده، هم‌مساحت هستند.

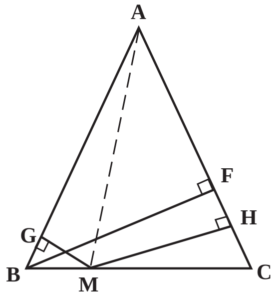
ــ در ویژگی ۳ با استفاده از این نکته که فاصلهٔ بین دو خط موازی همیشه ثابت است می‌توان دو ارتفاع AH و BH' را رسم نمود به‌طوری که :

$$AH=BH'\rightarrow\begin{cases}S_{ADC}=\frac{۱}{۲}DC\times AH\Rightarrow S_{AOD}=S_{ADC}-S_{DOC}\\ S_{BDC}=\frac{۱}{۲}DC\times BH'\Rightarrow S_{BOC}=S_{BDC}-S_{DOC}\end{cases}$$

درنتیجه‌چون $S_{ADC}=S_{BDC}$ پس $S_{ADC}-S_{DOC}=S_{BDC}-S_{DOC}$ بنابراین $S_{AOD}=S_{BOC}$

و به همین شکل می‌توان مسئله دو مزرعهٔ I و II را حل نمود به‌طوری که :

$$S_{AFC}=S_{ABC}\Rightarrow S_{AFC}-S_{AOC}=S_{ABC}-S_{AOC}\Rightarrow S_{OFC}=S_{OAB}$$

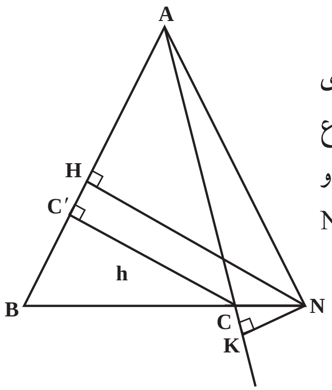


قسمت اول فعالیت چهارم این درس به روش زیر قابل توضیح می‌باشد.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BF \qquad S_{AMB} = \frac{۱}{۲} AB \times MG = \frac{۱}{۲} AC \times MG$$

$$S_{AMC} = \frac{۱}{۲} AC \times MH \rightarrow S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲} AC \times BF = \frac{۱}{۲} AC \times (MG + MH) \Rightarrow BF = MG + MH$$

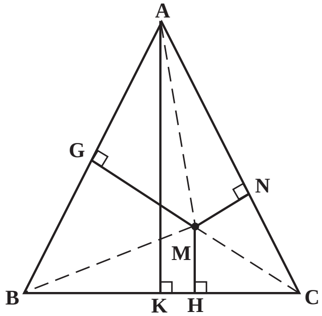


ـ پس می‌توان نتیجه گرفت که مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق. در قسمت دوم این فعالیت با استفاده از شکل روبه‌رو می‌خواهیم ثابت کنیم که $|NH - NK| = h$ ابتدا رأس A را به نقطه N وصل می‌کنیم و سپس داریم:

$$S_{ANB} = S_{ABC} + S_{ANC} \Rightarrow S_{ABC} = S_{ANB} - S_{ANC}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{۱}{۲} AB \times NH = \frac{۱}{۲} AB \times h + \frac{۱}{۲} AC \times NK \\ AB = AC \end{array}\right\} \Rightarrow NH = h + NK \Rightarrow |NH - NK| = h$$

در فعالیت پنجم همان‌طور که بیان شده است با اتصال نقطه M به سه رأس مثلث، سه مثلث ایجاد می‌گردد که جمع مساحت آنها برابر با مساحت کل مثلث است پس: $AB = BC = AC$ فرض



$$\left.\begin{array}{l} S_{AMB} = \frac{۱}{۲} AB \times MG \\ S_{AMC} = \frac{۱}{۲} AC \times MN \\ S_{BMC} = \frac{۱}{۲} BC \times MH \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times MG+\frac{۱}{۲}AC\times MN+\frac{۱}{۲}BC\times MH=\frac{۱}{۲}BC\times AK$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB(MG+MN+MH)=\frac{۱}{۲}AB\times AK\Rightarrow MG+MN+MH=AK$$

و نتیجه زیر فعالیت حاصل می‌گردد. البته در ابتدای همین درس در کار در کلاس اول یادآوری نمودیم که $AK=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و در ادامهٔ این فعالیت سؤالی برای دست‌ورزی مطرح شده است که در آن :

$$AK=۲+۴+۶=۱۲\Rightarrow \frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\Rightarrow a=\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳}=۸\sqrt{۳}$$

در نقاط شبکه‌ای و مساحت ابتدا تعریفی از نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌های شبکه‌ای ارائه می‌گردد و سپس نقاط مرزی و نقاط درونی شبکه‌ای معرفی می‌گردند و سپس در فعالیت ششم با توجه به تعریف چندضلعی که در ابتدای این فصل ارائه گردید حداقل نقاط مرزی (یعنی ۳) و حداقل نقاط درونی (یعنی صفر) مورد سؤال قرار می‌گیرد و سپس مجموعه جدول‌ها و سؤالاتی جهت محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای با ترتیب نقاط درونی صفر و یک و دو و ... به‌صورت مرحله به مرحله طراحی شده‌اند که دانش‌آموز با پاسخ به آنها می‌تواند به رابطهٔ $S=\frac{b}{۲}-۱+i$ دست یابد که از این رابطه به‌طور گسترده‌ای برای محاسبهٔ شکل‌های نامنظم هندسی استفاده می‌شود.

در کار در کلاس اول که زیر همین فعالیت قرار دارد دانش‌آموز با محاسبهٔ مساحت هر چندضلعی با دو روش (استفاده از فرمول پیک b و c و استفاده از فرمول محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌ها) عملاً به دست‌ورزی استفاده از این رابطه می‌پردازد و به برابری مساحت محاسبه شده در هر دو روش پی‌خواهد برد و در کار در کلاس آخر هدف این است که علاوه بر دست‌ورزی، دانش‌آموز به کاربرد این رابطه برای محاسبه مساحت شکل‌های نامنظم پی‌ببرد و بفهمد که هرچه واحدها را کوچک‌تر درنظر بگیرد تعریف دقیق‌تری محاسبه می‌شود.

حل تمرین‌های فصل سوم (درس اول)

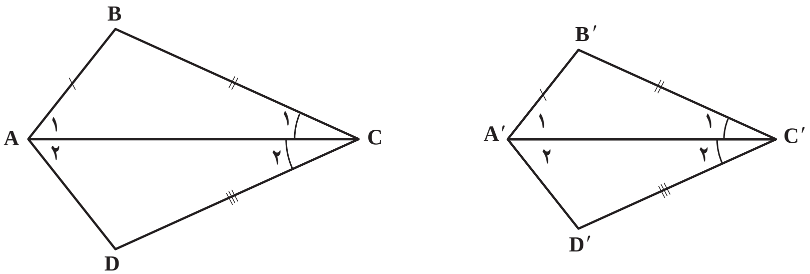
تمرین ص ۶۳

۱

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n \rightarrow n(n-۳)=۲n \rightarrow n^{۲}-۳n-۲n=۰$$

$$\rightarrow n^{۲}-۵n=۰ \rightarrow n(n-۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} n=۰ & \text{غ‌ق‌ق} \\ n-۵=۰ \rightarrow \boxed{n=۵} \rightarrow & \text{در پنج‌ضلعی} \end{cases}$$

۲ الف)



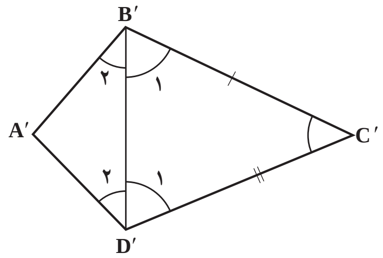
$$①\begin{cases} \hat{C}=\hat{C'} \\ \downarrow \\ \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=\hat{C'}_۱+\hat{C'}_۲ \xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C'}_۱} \hat{C}_۲=\hat{C'}_۲ \end{cases}$$

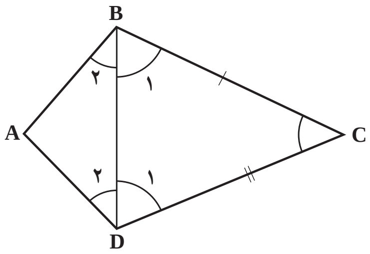
$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ \hat{B}=\hat{B'} \\ BC=B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C' \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} AC=A'C' \\ \hat{A}_۱=\hat{A'}_۱ \rightarrow \\ \hat{C}_۱=\hat{C'}_۱ \overset{①}{\rightarrow} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD=C'D' \\ AC=A'C' \\ \hat{C}_۲=\hat{C'}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{C}D \cong A'\overset{\Delta}{C'}D' \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} AD=A'D' \\ \hat{D}=\hat{D'} \\ \hat{A}_۲=\hat{A'}_۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱=\hat{A'}_۱ \\ \hat{A}_۲=\hat{A'}_۲ \\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{A'}_۱+\hat{A'}_۲ \Rightarrow \boxed{\hat{A}=\hat{A'}} \end{cases}$$

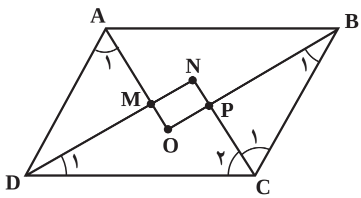
ب)





قطرهای BD و B′D′ را در دو چهار ضلعی رسم می‌کنیم. دو مثلث BDC و B′D′C′ بنابر، ض ـ ز ـ ض هم‌نهشت پس $\angle B_1 = \angle B'_1$ و $\angle D_1 = \angle D'_1$ چون $\angle D$ و $\angle D'$ اندازه‌های مساوی دارند پس $\angle B'_2 = \angle B_2$ و $\angle D'_2 = \angle D_2$ و BD=B′D′ چرا؟ در نتیجه، دو مثلث ABD و A′B′D′ بنابر، ز ـ ض ـ ز هم‌نهشت‌اند و در نتیجه AB=A′B′، AD=A′D′ و $\angle A = \angle A'$.

۳



$$\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ \Rightarrow B\overset{\Delta}{P}C : \hat{P}=90^\circ$$

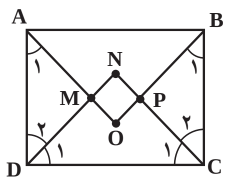
و به صورت مشابه ثابت می‌شود که $\hat{M}=90^\circ$ است.

$$\hat{C}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1+\hat{C}_2=90^\circ \Rightarrow D\overset{\Delta}{N}C : \hat{N}=90^\circ$$

و به صورت مشابه ثابت می‌شود که $\hat{O}=90^\circ$ است.

بنابراین در چهارضلعی MNPO همهٔ زاویه‌ها قائمه هستند پس این چهارضلعی یک مستطیل است.

ـ طبق قسمت بالا می‌توان ثابت کرد که در مستطیل مقابل $\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\hat{O}=90^\circ$ است.



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A}_{۱} = \hat{B}_{۱} = ۴۵^{\circ} \\ \hat{D}_{۲} = \hat{C}_{۲} = ۴۵^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{D}_{۱} + \hat{C}_{۱} = ۴۵^{\circ} \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \Delta DNC \Rightarrow DN = NC \\ \overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{BPC} \longrightarrow DM = PC \end{array}\right\} \Rightarrow DN - DM = NC - PC \Rightarrow \Rightarrow \boxed{MN = NP} \; ①$$

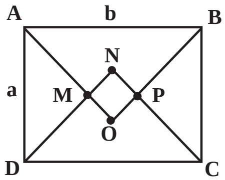
دو مثلث AOB و DNC نیز به حالت (زض ز) باهم، هم‌نهشت هستند پس $DN = AO$ می‌باشد و از طرفی مثلث AMD متساوی‌الساقین است پس $AM = DM$ پس می‌توان نوشت :

$$AO - AM = DN - DM \Rightarrow \boxed{OM = MN} \; ②$$

③

و به‌صورت مشابه می‌توان ثابت نمود که $PN = PO$ است.

ـ بنابراین طبق ۱ و ۲و ۳ می‌توان گفت چهارضلعی MNPO چهار زاویهٔ قائمه دارد و چهار ضلع آن باهم برابر است پس این چهارضلعی یک مربع است.

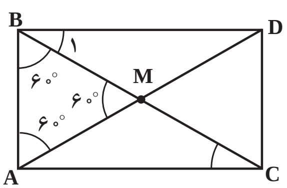


۴ مثلث‌های AMD و AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند پس :

$$\left.\begin{array}{l} AM = DM \Rightarrow AM^{۲} + DM^{۲} = AD^{۲} \Rightarrow ۲AM^{۲} = a^{۲} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \\ AO = BO \Rightarrow AO^{۲} + BO^{۲} = AB^{۲} \Rightarrow ۲AO^{۲} = b^{۲} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$OM = AO - AM \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b - \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$$

بنابراین اندازهٔ اضلاع مربع حاصل از برخورد نیمسازهای درونی مستطیل به طول b و عرض a برابر است با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$



۵ **روش اول :** پاره‌خط AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه D مشخص شود چون $AM = MD$ و $BM = MC$، بنابراین چهارضلعی ABDC که قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع مذکور اگر BC خط

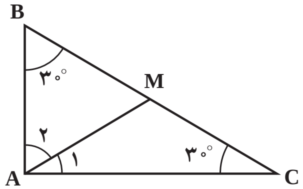
مورب باشد، $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ و $\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ = ۶۰^\circ$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C} = ۹۰^\circ$ و متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ ۹۰ درجه داشته باشد مستطیل است. بنابراین در مستطیل ABDC قطرها باهم برابر و منصف یکدیگرند یعنی $AD = BC$ و $BM = MC = AM = MD$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع ABM داریم و $AB = BM = AM$ (مثلث ABM دارای سه زاویهٔ ۶۰° می‌باشد) پس :

$$BC = BM + MC \xrightarrow{BM=MC} BC = ۲BM \Rightarrow \boxed{BM = \frac{BC}{۲}}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است.

$$\left.\begin{aligned} BM &= \frac{BC}{۲} \\ AP &= BM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{BC}{۲}}$$

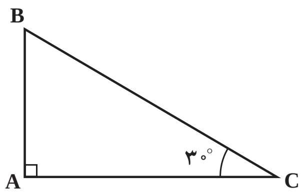
روش دوم :



$$\left.\begin{matrix}\text{میانه وارد بر وتر} \\ \text{نصف وتر است.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow AM = MC \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = ۳۰^\circ \\ \hat{A}_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \end{cases}$$

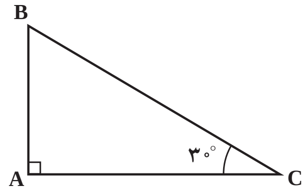
$$\text{متساوی‌الاضلاع است} \Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{۲}$$

روش سوم : قرینه مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می‌کنیم. در مثلث $BB'C$ چون $\hat{B} - \hat{B}' = ۶۰^\circ$ پس $\hat{C} = ۶۰^\circ$ بنابراین مثلث $BB'C$ متساوی‌الاضلاع است. یعنی $BB' = BC$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع CA میانهٔ BB' نیز هست پس $AB = \frac{BB'}{۲} = \frac{BC}{۲}$



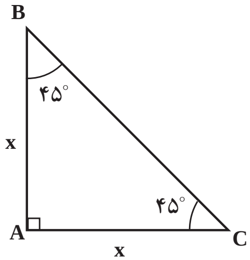
رابطه فیثاغورس $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - AB^۲ = BC^۲ - (\frac{BC}{۲})^۲ =$

$$BC^۲ - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۳BC^۲}{۴}$$



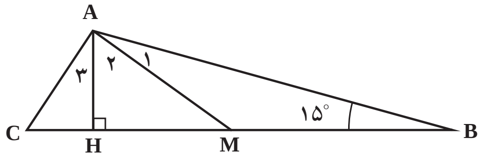
$$AC=\sqrt{\frac{۳BC^{۲}}{۴}} \Rightarrow \boxed{AC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن °۴۵ باشد، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس :



رابطه فیثاغورس $x^{۲}+x^{۲}=BC^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}=BC^{۲} \Rightarrow x^{۲}=\frac{BC^{۲}}{۲} \Rightarrow x=\frac{BC}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC}$

۶ با توجه به پاسخ سؤال ۵ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی $AM=\frac{۱}{۲}BC$



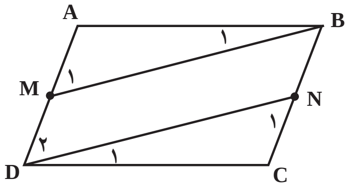
$$AM=BM \Rightarrow \hat{A}_{۱}=۱۵^{\circ}$$

ضلع مقابل به زاویه °۳۰

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۹۰^{\circ}\\ B=۱۵^{\circ}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=۷۵^{\circ} \Rightarrow \hat{A}_{۳}=۱۵^{\circ} \quad \Big\} \Rightarrow \hat{A}_{۲}=۶۰^{\circ} \Rightarrow \hat{M}_{۱}=۳۰^{\circ} \Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AM$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AM\\ AM=\frac{۱}{۲}BC\end{array}\right\} \Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}BC) \Rightarrow \boxed{AH=\frac{۱}{۴}BC}$$

۷

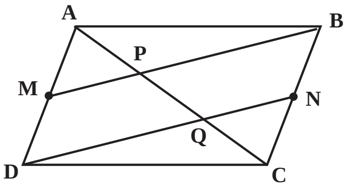


$$AD = BC \rightarrow \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AM = CN \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\Delta}{CND} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \\ \hat{N}_۱ = \hat{D}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D}_۲$$

$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{خط مورب } DN} \hat{N}_۱ = \hat{D}_۲$$

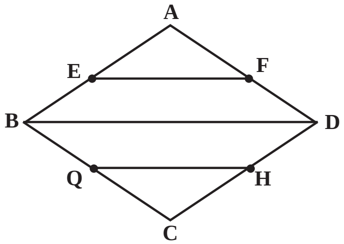
بنابراین طبق عکس قضیه خطوط موازی نتیجه می‌گیریم که : $MB \parallel DN$



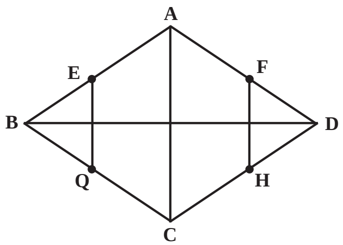
$$DN \parallel BM \begin{cases} \Rightarrow QN \parallel BP \xrightarrow[\text{در مثلث } BPC]{\text{طبق قضیه تالس}} \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{QC}{PQ} = ۱ \Rightarrow PQ = QC \\ \Rightarrow MP \parallel DQ \xrightarrow[\text{در مثلث } ADQ]{\text{طبق قضیه تالس}} \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AP}{PQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ \end{cases}$$

و در نتیجه $AP = PQ = QC$

۸ چهارضلعی دلخواه ABCD را درنظر می‌گیریم و نقاط E و F و G و H را وسط اضلاع آن اختیار می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} AB \ \text{وسط}\ E \\ AD \ \text{وسط}\ F \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} EF \parallel BD \\ \left.\begin{array}{l} CD \ \text{وسط}\ H \\ BC \ \text{وسط}\ G \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CG}{CB}=\dfrac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} GH \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel GH$$



و به‌طور مشابه و با درنظر گرفتن شکل مقابل می‌توان ثابت نمود که $EG \parallel FH$ بنابراین در چهارضلعی EFHG اضلاع مقابل باهم موازی‌اند. پس چهارضلعی EFHG متوازی الاضلاع است.

ــ اگر دوقطر چهارضلعی ABCD هم‌اندازه باشند، چهارضلعی حاصل لوزی است.

ــ اگر دو قطر چهارضلعی ABCD برهم عمود باشند، چهارضلعی حاصل مستطیل است.

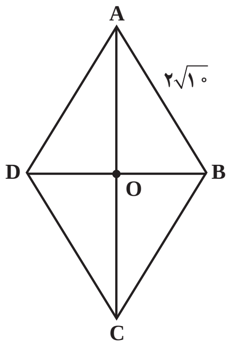
ــ محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع اندازه قطرهای چهارضلعی اصلی چون طبق قضیه تالس و عکس آن می‌توان نوشت:

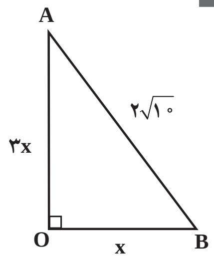
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{EG}{AC}=\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{FH}{AC} \Rightarrow EG+FH=AC \\ \dfrac{EF}{BD}=\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{GH}{BD} \Rightarrow EF+GH=BD \end{array}\right\} \Rightarrow EG+FH+EF+GH=AC=BD$$

حل تمرین‌های فصل سوم (درس دوم)

تمرین ص ۷۲

۱



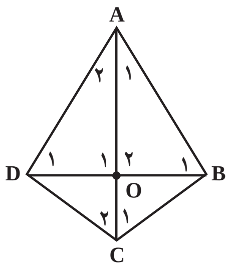


$$\frac{BD}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}BD}{\frac{۱}{۲}AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{OB}{OA}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

$$x^{۲}+(۳x)^{۲}=(۲\sqrt{۱۰})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۹x^{۲}=۴۰\Rightarrow ۱۰x^{۲}=۴۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۴۰}{۱۰}=۴\Rightarrow x=۲$$

$$OA=۳x=۳\times۲=۶\rightarrow AC=۱۲ \text{ و } BD=۲\times۲=۴\Rightarrow S=\frac{AC\times BD}{۲}=\frac{۱۲\times۴}{۲}=۲۴$$

۲



$$\left.\begin{matrix}AB=AD\\BC=DC\\AC=AC\end{matrix}\right\}\xRightarrow{(\text{ض ض ض})}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADC}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\\hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{AC نیمساز } \hat{A} \text{ و } \hat{C} \text{ است}$$

$$\text{AD=AB} \rightarrow \text{ متساوی‌الساقین است } \overset{\Delta}{ABD}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\\hat{B}_۱=\hat{D}_۱\\AB=AD\end{matrix}\right\}\xRightarrow{(\text{ز ض ز})}\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OAD}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\Rightarrow\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\hat{O}_۱=۱۸۰^\circ\\&\qquad\Rightarrow\hat{O}_۲=\hat{O}_۱=۹۰^\circ\\&OB=OD\Rightarrow \quad \text{AC عمودمنصف BD است}\end{aligned}\right.$$

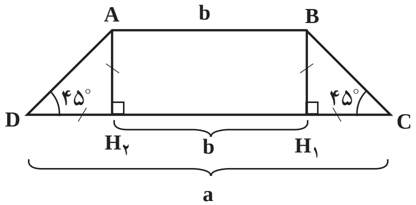
پس $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=\hat{O}_۳=\hat{O}_۴=۹۰^\circ$ یعنی دو قطر AC و BD بر هم عموداند. پس :

$$S=\frac{AC\times BD}{۲}=\frac{۶\times ۸}{۲}=۲۴$$

۳ چون در هر دو متوازی‌الاضلاع قاعده‌ها برابر AB و ارتفاع‌ها برابر با فاصلهٔ دو خط موازی است بنابراین

$S_۱=S_۲=AB\times h=S$

۴

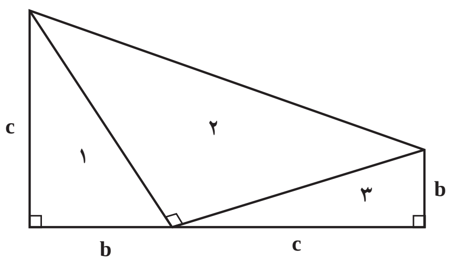


$AD=BC$ و $AH_۱=AH_۲=CH_۲=DH_۱=\dfrac{a-b}{۲}$

$$S=\frac{(DC+AB)AH_۱}{۲}=\frac{(a+b)(\frac{a-b}{۲})}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}(a+b)(a-b)}{۲}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۴}(a^۲-b^۲)$$

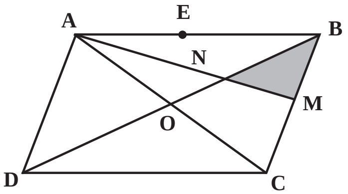
۵



$S_{ذوزنقه}=S_{\Delta_۱}+S_{\Delta_۲}+S_{\Delta_۳}=\frac{۱}{۲}bc+\frac{۱}{۲}a^۲+\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}(a^۲+۲bc)$

$S_{ذوزنقه}=\frac{۱}{۲}(b+c)(b+c)=\frac{۱}{۲}(b^۲+c^۲+۲bc)$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}(a^۲+۲bc)=\frac{۱}{۲}(b^۲+c^۲+۲bc)\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow$ قضیه فیثاغورس



۶ از C به N وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا AB را در E قطع کند. چون نقطه N محل همرسی میانه‌هاست پس :

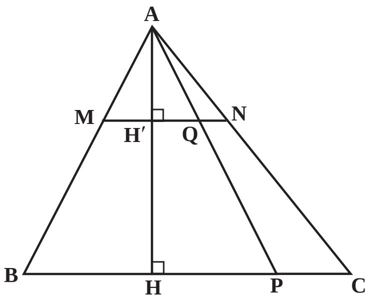
$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD} \end{array}\right\}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

O میانهٔ AC است

M میانهٔ BC است.

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷



$$\frac{AM}{BM}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{QN}{PC}=\frac{AH'}{AH}=\frac{MQ}{BP}=\frac{۱}{۳}$$

اگر QN=x درنظر بگیریم آنگاه داریم : AH′=x و AH=۳x و PC=۳x

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{QN}{MQ}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases} QN=x\Rightarrow MQ=۳x \\ PC=۳x\Rightarrow PB=۹x \end{cases}$$

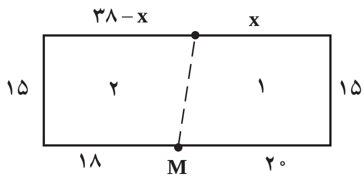
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AQN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}QN.AH'}{\frac{۱}{۲}BC.AH}=\frac{\frac{۱}{۲}x.x}{\frac{۱}{۲}(\underbrace{۳x+۹x}_{۱۲x}).۳x}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\cancel{x}^{۲}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}۳۶\cancel{x}^{۲}}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{ABP}} = \frac{۱}{۲}BP.AH = \frac{۱}{۲}۹x.۳x = \frac{۱}{۲}(۲۷x^{۲}) \\ S_{\overset{\Delta}{AMQ}} = \frac{۱}{۲}MQ.AH' = \frac{۱}{۲}۳x.x = \frac{۱}{۲}(۳x^{۲}) \end{array}\right\} \Rightarrow S_{MQPB} = S_{APB} - S_{AMQ}$$

$$\Rightarrow S_{MQPB} = \frac{۱}{۲}(۲۷x^{۲}) - \frac{۱}{۲}(۳x^{۲}) = \frac{۱}{۲}(۲۴x^{۲})$$

$$\frac{S_{MQPB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}(۲۴\cancel{x^{۲}})}{\cancel{\frac{۱}{۲}}(۳۶\cancel{x^{۲}})} = \frac{۲۴}{۳۶} = \frac{۲}{۳}$$

۸



$$S_{۱} = \frac{۱}{۲}(۲۰ + x) \times ۱۵$$

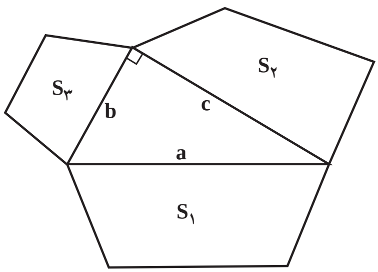
$$S_{۲} = \frac{۱}{۲}(-۳۸\overset{۵۶-x}{-x} + ۱۸) \times ۱۵$$

$$S_{۱} = S_{۲} \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}(۳۰۰ + ۱۵x) = \cancel{\frac{۱}{۲}}(۸۴۰ - ۱۵x)$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ + ۱۵x = ۸۴۰ - ۱۵x \Rightarrow \overset{۳۰x}{۱۵x + ۱۵x} = ۸۴۰ - ۳۰۰ = ۵۴۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵۴۰}{۳۰} = ۱۸$$

۹ در هر مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ فیثاغورث برقرار است یعنی داریم : $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$



فرض کنیم سه چندضلعی متشابه ساخته شده به مساحت‌های $S_{۱}$ و $S_{۲}$ و $S_{۳}$ باشند. می‌دانیم نسبت مساحت دو چند ضلعی متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن است پس $\frac{S_{۲}}{S_{۱}} = \frac{c^{۲}}{a^{۲}}$ و $\frac{S_{۳}}{S_{۱}} = \frac{b^{۲}}{a^{۲}}$ در نتیجه،

$$\frac{S_۳}{S_۱}+\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{b^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{S_۳+S_۲}{S_۱}=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow S_۱=S_۲+S_۳$$

۱۰ $S=\frac{۹}{۲}-۱+۱۳=\frac{۷}{۲}+۱۳$ چند ضلعی بزرگ‌تر

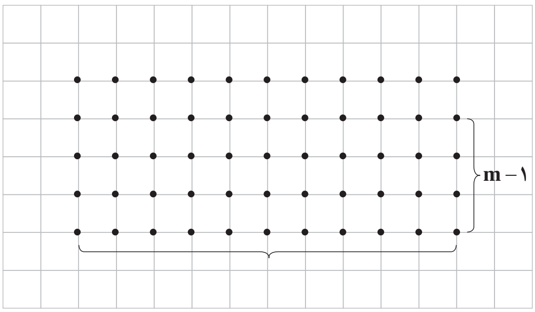
$$S=\frac{b}{۲}-۱+i$$

$S=\frac{۵}{۲}-۱+۳=\frac{۳}{۲}+۳$ چند ضلعی کوچک‌تر

مساحت قسمت سایه زده شده = S چند ضلعی بزرگ‌تر − S چند ضلعی کوچک‌تر $=\frac{۷}{۲}+۱۳-\frac{۳}{۲}-۳=\frac{۴}{۲}+۱۰=۲+۱۰=۱۲$

۱۱

اندازه طول مستطیل n واحد است پس روی هر طول مستطیل n+۱ نقطه داریم، در عرض نیز همین‌گونه است یعنی m+۱ نقطه روی هر عرض داریم اما دو نقطه آن قبلاً در هر قسمت محاسبه شده است پس m−۱ نقطه روی عرض می‌ماند در نتیجه تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر است با



b=۲(n+۱)+۲(m−۱)=۲n+۲m اما برای محاسبه نقطه‌های درونی ستون اول و آخر را کنار می‌گذاریم n−۱ ستون داریم که روی هر یک m−۱ نقطه است پس، i=(n−۱)(m−۱) پس

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۲n+۲m}{۲}+(n-۱)(m-۱)-۱=n+m+mn-n-m+۱-۱=mn=S$$ مستطیل

۱۲

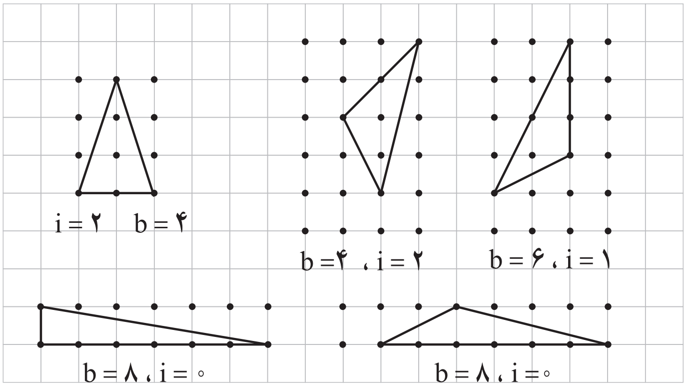
$$\frac{b}{۲}+i-۱=۳\Rightarrow b+۲i=۸$$

پس ۳ ≤ b و ۰ ≤ i در نتیجه، ۸−b ≥ ۰ بنابراین ۳≤b≤۸ چون b=۲(۴−i) پس باید b زوج نیز باشد در نتیجه b فقط می‌تواند سه مقدار ۸، ۶، ۴ را اختیار کند.

پس i نیز محاسبه می‌شود.

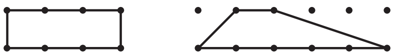
b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

می‌توانیم تعدادی را رسم کنیم مثلاً سه ضلعی‌ها به‌صورت زیر می‌توانند باشند.

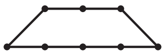


می‌توانید رأس بالا را روی هر یک از نقاط بالایی ضلع قرار دهید

وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارد که b=۸ و i=۰، سه چهارضلعی نظیر آن به‌صورت زیر است.



با تغییر دو نقطه بالایی می‌توانید ذوزنقه‌های دیگری نیز رسم کنید.



فصل ۴

تجسم فضایی

نگاه کلی به فصل

آشنایی با شکل‌های فضایی از کتاب ریاضی پنجم ابتدایی با طرح دستور محاسبهٔ حجم مکعب مستطیل آغاز شده و دانش‌آموزان به تدریج نسبت به انواع شکل‌های فضایی هندسی مثل حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی شناخت پیدا کرده‌اند و دستور محاسبهٔ مساحت جانبی و مساحت کل و حجم آنها را آموخته‌اند.

همچنین رابطه بین سطح و حجم و دوران حول محور سطح را که منجر به ساخته شدن یک حجم فضایی می گردد فرا گرفته‌اند، گسترده یک شکل فضایی را می‌شناسند و با تشخیص نماهای مختلف یک جسم هندسی آشنا هستند.

در کتاب ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه تعریف کره، استوانه، هرم و مخروط بیان شده و دانش‌آموزان کمابیش دستور محاسبه حجم و مساحت جانبی و مساحت کل این شکل‌ها را به‌صورت تجربی فرا گرفته‌اند. همچنین بحث گسترده شکل‌های فضایی مطرح شده و دوران حول محور در شکل‌های مختلف تکرار شده و حجم‌های ساخته شده توسط آن موردبررسی قرار گرفته‌است. در پایان مبحث هندسه فضایی نیز بحث برش مقطعی شکل‌های فضایی مطرح گردیده است. در کتاب هندسه پایه دهم دوره دوم متوسطه، هندسه فضایی از مفاهیم تعریف نشده (نقطه، خط، صفحه) به‌عنوان مفاهیمی که ساختمان اصلی هندسه را می‌سازند آغاز شده و طرح مبحث حالت‌های مختلف دو خط، حالت‌های مختلف خط و صفحه و حالت‌های مختلف دو صفحه در فضا ادامه می‌یابد.

در ادامهٔ آن مفهوم تعامد بررسی شده و مفهوم عمود بودن خط بر صفحه،و دو صفحه عمود بر هم مطرح گردیده است. در درس دوم این فصل، برای آشنایی دانش‌آموزان و همچنین تقویت دید فضایی آنها در مراحل بالاتر تحصیلی، به ویژه در دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی، مبحثی با عنوان تفکر تجسمی گنجانده شده است و هدف از آن تقویت تجسم فضایی در دانش‌آموزان می‌باشد.

این درس شامل سه قسمت است. در بخش اول دید از جهات مختلف و رسم نماهای مختلف یک شکل فضایی مطرح شده که دانش‌آموز از پایه هفتم با آن آشنا شده است.

در بخش دوم، برش زدن یک شکل فضایی توسط یک صفحه و سطح مقطع حاصل از این برش‌ها مطرح گردیده و تلاش شده که دانش‌آموزان ضمن تقویت تجسم فضایی بتوانند سطح مقطع حاصل از برش را حدس بزنند.

و در بخش پایانی نیز دوران حول محور و تشکیل شکل‌های فضایی با استفاده از دوران شکل‌های مسطح هندسی یادآوری گردیده است. دانش‌آموزان با این بحث در کتاب هفتم و نهم آشنا شده‌اند. و در این کتاب نیز تلاش شده با دوران شکل‌های هندسی خاصی مثل کره، نیمکره، مثلث، مستطیل و ... حول یک محور یا خط خاص شکل فضایی حاصل معرفی شود.

نقشه مفهومی


تجسم فضایی
خط، نقطه و صفحه
حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا
صفحه
موازی
متقاطع
منطبق
فضا
موازی
متقاطع
متنافر
منطبق
حالت‌های مختلف خط و صفحه
موازی
متقاطع
خط بر صفحه واقع است.
حالت‌های مختلف دو صفحه
موازی
متقاطع
منطبق
تعامد
عمود بودن خط بر صفحه
عمود بودن دو صفحه بر هم
تفکر تجسمی
دید از جهات مختلف (نما)
برش
دوران حول محور

تصویر عنوانی

از قدیم در ساخت بناها از دانش هندسه استفاده شده است و با دیدن بناهای تاریخی می‌توان به میزان آگاهی و دانش ریاضی‌دانان و معماران ایرانی پی برد. تصویر عنوانی این فصل از کتاب، آرامگاه شیخ الرئیس بوعلی سینا است که در میانه میدانی به همین نام در شهر همدان واقع شده است. شهر همدان حدود ۵۰ سال است که به برج آرامگاه بوعلی، مزین شده است. این بنا ابتدا در زمان قاجاریه ساخته شد. طرح و نقشه بنای فعلی توسط «مهندس هوشنگ سیحون» به سبک معماری قرنی که بوعلی سینا در آن می‌زیسته و از روی قدیمی‌ترین بنای تاریخ دار اسلامی یعنی برج گنبد قابوس در شهر گنبد کاووس اقتباس شده است.

تصویر سمت چپ در تصویر عنوانی، نمای داخلی آرامگاه بوعلی است که به جهت ارتباط آن با درس اول تفکر تجسمی به آن اشاره شده است.

دانستنی‌هایی برای معلم

افلاطون معتقد است که «مطالعه ریاضیات دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است، زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

توسعه آموزش علوم پایه، یک نیاز اساسی در زیرساخت‌های توسعه صنعتی و علوم کاربردی محسوب می‌شود. اشباع حس کنجکاوی جوانان و لذت اندیشه‌ورزی و نوآوری در این سنین سرمایه گران سنگی است که تعمیق آموزش علوم پایه و محض تأمین‌کننده مناسبی برای آن می‌باشد.

هندسه فضایی

بررسی روابط بین خط‌ها و صفحه‌ها و شکل‌های فضایی که از برخورد صفحه‌ها به‌وجود می‌آیند و نیز رویه‌هایی که از دوران خط‌ها یا کمان‌ها به‌وجود می‌آیند و همچنین رویه‌هایی که از حرکت خط‌ها پدید می‌آیند، به کمک مفاهیم اولیه یا تعریف نشده‌ها، تعریف‌ها، اصل‌ها و قضیه‌ها در هندسه فضایی مطرح می‌شود.

ـــ **تعریف نشده‌ها یا مفهوم‌های اولیه** : مفاهیمی هستند که به علت فقدان معلومات کافی قابل تعریف نیستند. وجود عناصر نامعین در این مفاهیم یعنی عناصری که قابل تصور در ذهن نیستند از علل قابل تعریف نبودن آنهاست.

تعریف نشده‌های مهم هندسه فضایی که اغلب آنها در هندسه مسطحه نیز تعریف ندارند عبارت‌اند از :
نقطه، خط، صفحه، شکل، مجموعه، سطح و فضا.

ـــ **اصل** : گزاره‌ای است که درستی آن بدون اثبات پذیرفته شده است. اصول مهم هندسه فضایی که برخی از آنها در هندسه مسطحه نیز معتبر است عبارت‌اند از :

۱ از دو نقطه متمایز یک و تنها یک خط می‌گذرد و هر خط لااقل دارای دو نقطه است.

۲ اگر دو نقطه از خطی در صفحه‌ای باشد، تمام آن خط در آن صفحه قرار خواهد داشت.

۳ از سه نقطه که روی یک خط راست نباشند یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۴ لااقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط راست واقع نیستند.

۵ حداقل ۴ نقطه وجود دارد که بر یک صفحه واقع نیستند.

۶ اگر دو صفحهٔ متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند در یک خط راست مشترک خواهند بود.

ــ **اصل پنجم اقلیدس** : از هر نقطه فضا تنها یک خط موازی با خط مفروض می‌گذرد.

ــ **نمایش صفحه** : شکل‌های مختلف نمایش صفحه عبارت‌اند از صورت‌هایی که از اصول هندسه فضایی و تعریف دو خط موازی می‌توان نتیجه گرفت. این صورت‌ها به شرح زیر هستند :

۱ سه نقطه غیرواقع بر یک خط

۲ یک خط و نقطه‌ای در خارج آن

۳ دو خط متقاطع

۴ دو خط موازی

ــ **هندسه ترسیمی** : هندسه ترسیمی عبارت است از نمایش یک نقطه، خط، سطح یا جسم با تصاویر دو بعدی از آن.

وقتی ناظر مثلاً جسم را از روبه‌رو نگاه می‌کند باید تصویر آنچه را می‌بیند روی صفحه رسم کند. از روی این تصاویر دو بعدی می‌توان جسم سه بعدی را تصور کرد.

هندسه ترسیمی یکی از شاخه‌های علم ریاضی است که به کمک قوانین آن می‌توان اجسام سه بعدی را به‌طور کامل و دقیق روی صفحه دو بعدی ترسیم کرد. پیشرفت هندسه ترسیمی مدیون اصولی است که توسط «گاسپارد مونژ» ملقب به پدر هندسه ترسیمی در رساله‌ای تحت عنوان «مروری بر هندسه ترسیمی» ارائه شده است که مبانی نقشه‌کشی صنعتی و اصول هندسه ترسیم را بنیان نهاد.

هندسه ترسیمی نیازمند تجسم قوی و توانمند می‌باشد و از ضروری‌ترین اصولی است که باید فراگیر به آن تجهیز گردد. به گفته انیشتین : «تجسم از علم و دانش مهم‌تر است.»

یکی از ابزارهای مهم و مؤثر برای تقویت قدرت تجسم، هندسه ترسیمی است و به همین دلیل از مهم‌ترین مباحث آموزشی برای فراگیران می‌باشد.

معرفی منابع برای معلمان

معلمین گرامی برای دانش‌افزایی در خصوص ترسیم‌های هندسی می‌توانند از کتاب‌های درسی رسم فنی مربوط به دانش‌آموزان فنی و حرفه‌ای کمک بگیرند.

سؤالات ارزشیابی

۱ صفحه P و نقطه O روی آن را درنظر بگیرید. خط d را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه O بگذرد. کدام گزینه درمورد وضعیت خط d و صفحه p صحیح است؟

الف) خط d بر صفحه P واقع است.
ج) خط d و صفحه P متقاطع‌اند.
ب) خط d و صفحه P موازی‌اند.

۲ اگر دو صفحه متمایز P و P' در نقطهٔ A مشترک باشند آن دو صفحه نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) P و P' متقاطع‌اند.
ج) P و P' منطبق‌اند.
ب) P و P' موازی‌اند

۳ دو صفحه متمایز P و P' و خط d را که در هر دو صفحه فوق قرار دارد، در نظر بگیرید دو صفحه P و P' نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) منطبق‌اند
ب) متقاطع‌اند
ج) موازی‌اند

۴ دو خط d و d' با هم موازی‌اند. اگر صفحه P و خط d موازی باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) خط d' و صفحه P موازیند
ج) خط d' بر صفحه P عمود است.
ب) خط d' و صفحه P متقاطع‌اند
د) الف و ج صحیح است.

۵ خط d صفحه P را قطع نمی‌کند. گزینه صحیح کدام است؟

الف) خط d بر صفحه P عمود است.
ج) خط d و صفحه P موازی‌اند.
ب) خط d بر صفحه P واقع است.
د) ب و ج صحیح است.

۶ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر دو صفحه P و P' در نقطه A مشترک باشند نسبت به هم .... یا .... هستند.

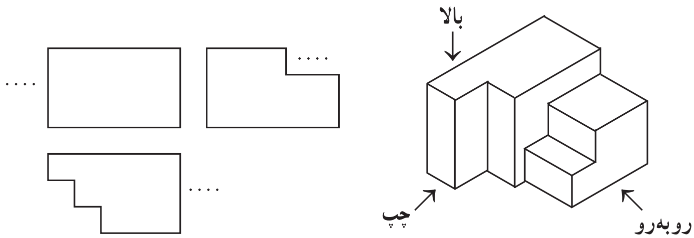
ب) خط d و صفحه P موازی هستند هرگاه ....

ج) از نقطه O خارج صفحه P .... خط موازی با صفحه P می‌توان رسم کرد.

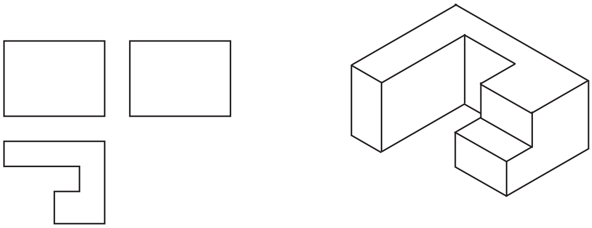
د) از نقطه O خارج خط d .... صفحه موازی با خط d می‌توان رسم کرد.

۷ سه نمای بالا، روبه‌رو و چپ از جسم زیر رسم شده است. مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام نماست؟

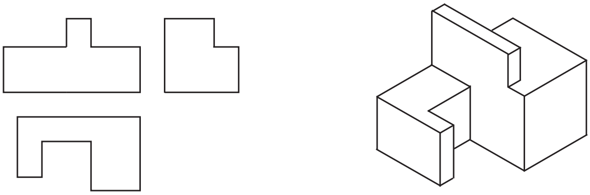
الف)



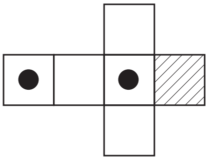
ب)

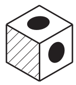
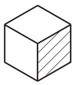
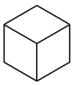
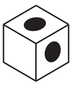


ج)



۸ کدام یک از مکعب‌های زیر مربوط به گسترده شکل روبه‌رو است؟

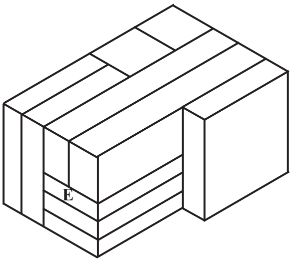


الف)  ب)  ج)  د) 

۹ مکعب E که در بین ده مکعب دیگر قرار گرفته با چند مکعب در تماس است؟

الف) ۱ ب) ۷

ج) ۶ د) ۵



۱۰ برای هر مورد توضیح دهید که چگونه به کمک دوران می‌توان آنها را تجسم کرد؟

الف) مخروط ناقص

ب) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.

ج) استوانه‌ای به شعاع قاعده 1

د) دو مخروط یکسان که از رأس به هم چسبیده‌اند.

درس اول

خط، نقطه و صفحه

اهداف درس اول

۱ آشنایی با نقطه، خط و صفحه و نحوهٔ نمایش و نام‌گذاری هر کدام
۲ شناخت نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی در یک راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند.
۳ شناخت حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و در فضا، همچنین حالت‌های مختلف خط و صفحه و دو صفحه.
۴ درک مفهوم تعامد و عمود بودن خط بر صفحه و دو صفحه عمود برهم.

ابزار موردنیاز :
۱ مداد و خط‌کش
۲ صفحه کتاب، میز، نیمکت و صفحه دیوار کلاس

روش تدریس درس اول

هندسه فضایی در این کتاب با مرور مفاهیم تعریف نشده شروع می‌شود و ضمن یادآوری مفهوم نقطه و خط و مفهوم صفحه، روش‌های نام‌گذاری خط و نقطه و صفحه یادآوری می‌شود. در کار در کلاس این صفحه با استفاده از بازی تنیس، مفهوم نقاط هم راستا، نقاطی که در یک صفحه هستند ولی هم‌راستا نیستند و نقاطی که در یک صفحه نیستند، معرفی می‌گردد و به طور شهودی اصول اولیهٔ هندسه فضایی مطرح می‌شود.

سپس حالت‌های مختلف دو خط در صفحه به کمک شکل مطرح می‌شود. در ادامه حالت‌های مختلف دو خط در فضا طی حل فعالیت بیان می‌گردد. در کار در کلاس مربوط به این بخش مفاهیم اساسی خط و صفحه آمده است و به دانش‌آموز کمک می‌کند تا این مفاهیم را در صفحه و فضا مقایسه نموده و نتیجه‌گیری نماید.

در ادامه حالت‌های مختلف خط و صفحه به کمک شکل نمایش داده شده و از دانش‌آموزان خواسته

می‌شود که جملات مربوط به آن را کامل نمایند.

در کار در کلاس صفحه بعدی اصول اساسی مربوط به خط در صفحه و در فضا با شکل‌های مربوطه نشان داده شده و در هر مورد سؤالاتی مطرح می‌شود که پاسخگویی به این سؤال‌ها باعث درک بهتر این مفاهیم می‌شود.

توصیه می‌شود فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها به کمک تصاویری از دنیای واقعی برای درک بهتر شهودی مورد تأمل واقع شود.

در ادامه حالت‌های مختلف دو صفحه همراه با تصاویر مربوط بیان شده و از دانش آموز خواسته شده که جملات ناقص را کامل کند. کار در کلاس این بخش، حالت‌های مختلف دو خط، خط و صفحه، دو صفحه را در یک مکعب تکرار می کند تا یادگیری مطالب عمیق تر شود.

در ادامه بحث، تعامد تعریف شده و با استفاده از شکل مداد و کتاب عمود بودن خط بر صفحه مطرح می گردد و اصول اساسی عمود بودن خط بر صفحه به‌طور شهودی و با استفاده از شکل‌های مربوطه نشان داده شده است.

سپس دو صفحه عمود بر هم تعریف می‌شوند و در کار در کلاس مربوط به آن، مفهوم عمود بودن دو صفحه همراه با طرح سؤالاتی تکرار و تمرین شده است. مفهوم عمود بودن در حالت‌های مختلف دو خط و صفحه، یا دو صفحه و خط، خط و دو صفحه موازی و دو خط موازی که بر صفحه‌ای عمودند مرور می‌شود.

توصیه‌های آموزشی

❑ در انجام فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها فضا و زمان کافی برای تأمل به دانش‌آموزان داده شود تا دانش مورد نیاز خود را شکل دهند.

❑ در این کتاب تمرکز اصلی بر روی مفاهیم شهودی است. لذا از ورود به مباحث استدلالی اجتناب کنید.

❑ در این کتاب پس از مرور پژوهش‌های متعدد و بررسی کتاب‌های درسی کشورهای مختلف، انطباق حالتی از توازی منظور نشده است. لذا انطباق و توازی به شکل دو مفهوم جدا مطرح شده‌اند. در این خصوص ذکر دو نکته ضروری است :

۱ در حالتی که خط بر صفحه واقع است، از عبارت «انطباق» استفاده نمی‌شود. در عوض می‌نویسیم خط بر صفحه واقع است یا خط در صفحه قرار دارد.

۲ در حالتی که دو خط یا دو صفحه بر هم منطبق می‌شوند، در واقع با هم یکی می‌شوند.

❑ استفاده از مواد و کاغذ و ... در نمایش صفحه و خط برای کمک به درک شهودی است و نباید به این بدفهمی منجر شود که خط و صفحه محدود هستند یا صفحه دارای ضخامت است.

درس دوم

تفکر تجسمی

اهداف درس دوم

۱ درک مفهوم دید از جهات مختلف و رسم شکل با نماهای مختلف.

۲ آشنایی با برش‌های یک جسم فضایی و تجسم سطح مقطع ایجاد شده در آن.

۳ شناخت سطح مقطع‌های ایجاد شده در استوانه، کره، منشور و مخروط با برش‌های مختلف عمودی، افق و مایل.

۴ شناخت دوران حول محور و تجسم شکل ایجاد شده توسط آن

ابزار موردنیاز :

۱ اجسام مختلف سه بعدی

۲ دست‌سازه‌های اسفنجی به شکل استوانه، کره، منشور و مخروط یا استفاده از میوه‌هایی با این اشکال

روش تدریس درس دوم

به دلیل تأکید سند برنامه درسی ملی بر تقویت انواع تفکر در دانش‌آموزان از جمله تفکر تجسمی، این درس به بیان مفهوم تفکر تجسمی اختصاص داده شده و در آن به سه مبحث ترسیم نماهای مختلف یک جسم هندسی، برش و دوران طول یک محور پرداخته شده است.

انسان‌ها برای بیان اندیشه‌های خود به دو روش عمل می‌کنند. یا مفهوم موردنظر را در قالب کلمات در ذهن خود پردازش کرده و آن را بیان می‌کنند و یا به کمک بازی تصاویر در ذهن دربارهٔ موضوع مورد نظر خود فکر کرده و سپس آن را بیان می‌کنند. نوع دوم تفکر را تفکر تجسمی می‌نامیم.

توصیه می‌شود در تدریس این درس حتماً فعالیت‌ها در کلاس کار شود و به دانش‌آموزان فرصت کافی برای پردازش تصویر در ذهن داده شود.

در قسمت دوم فعالیت، پیدا کردن تعداد دقیق پرتقال‌ها و ورود به مباحث حجم هرم یا الگوهای عددی

منظور نیست و تنها هدف این است که دانش آموز چینش پرتقال‌ها و چگونگی روند کاهش آن را در ذهن خود مجسم کند. در قسمت چهارم فعالیت، حتماً فرصتی برای رسم کروکی خانه تا مدرسه به دانش‌آموز داده شود و از آنان خواسته شود که در منزل یا کلاس درس طرحی از مسیر خانه تا مدرسه رسم کنند.

در قسمت آخر این فعالیت در حالت فضایی اشاره به هرم مربع القاعده صحیح است و علاوه بر آن این شکل می‌تواند متعلق به مکعب مستطیلی باشد که قطرهای آن رسم شده است.

در ادامهٔ این بحث قبل از ورود به بحث نماها و دیدن دقیق‌تر یک جسم از ابعاد مختلف به کمک تصاویر ارائه شده در بالای صفحه به هنر هنرمندان، عکاسان و نقاشانی اشاره می‌شود که تنها با داشتن نگاهی متفاوت به دنیای اطراف توانسته‌اند اثری ارزشمند از خود به‌جای بگذارند.

توصیه‌های آموزشی

❑ دقت شود که در این درس به علت زمینه‌سازی برای رشته‌های فنی و مهندسی نظیر معماری، الفبای اولیه ترسیم فنی قرار است آموزش داده شود. لذا در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع‌های مختلف و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست. فقط در شکل‌هایی که به‌صورت شطرنجی اندازه‌های دقیق داده شده انتظار می‌رود که در رسم نماهای مختلف هم خطوط شطرنجی ترسیم شود.

❑ برای دروس برش و دوران از همکاران انتظار می‌رود که تا حد ممکن از دست‌سازه‌های هندسی و اجسام دنیای واقعی نظیر میوه‌ها و ... در آموزش کمک بگیرند.

❑ به دانش‌آموزان یادآوری کنید که مهارت حل مسأله مستلزم صرف زمان و داشتن مداومت بر کار است و حل هر مسأله می‌تواند در حل مسائل مشابه دیگر به او کمک کند.

❑ تفکر تجسمی در دانش‌آموزان مختلف دارای سطوح متفاوت است. اما با تکرار و تمرین می‌توان این مهارت را در همه تقویت کرد.

❑ در این کتاب دادن نماهای مختلف یک شکل هندسی و سپس خواستن رسم آن جسم هندسی یا تجسم آن مدنظر نیست و تنها به شیوهٔ عکس عمل می‌شود. بدین معنا که شکل هندسی داده شده و نماهای مختلف خواسته می‌شود.

❑ مجله ریاضی صفحه ۹۱ صرفاً برای تعمیق مبحث تجسم هندسی است و مجلات ریاضی در ارزشیابی استفاده نمی‌شوند.

❑ در این درس هدف تقویت تفکر تجسمی است. لذا سعی شده حتی‌الامکان از طرح سؤالات محاسباتی اجتناب شود. لطفاً در ارزشیابی‌ها به این موضوع دقت شود.

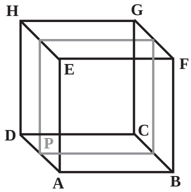
حل بعضی از تمرین‌های فصل چهارم

تمرین صفحه ۸۱

۳ الف) یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است.

ب) یا با خط دیگر موازی است یا هر دو خط بر آن صفحه قرار دارند.

ج) متقاطع.

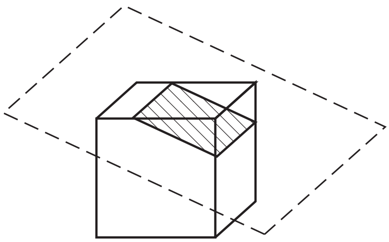


۴ الف) ــ می‌تواند با آن موازی باشد مثل صفحه P و دو خط FB و HG

ــ خط دیگر می‌تواند بر آن واقع باشد. مثل صفحه EFBA که با HG موازی است و FB بر آن قرار دارد.

ــ می‌تواند متقاطع باشد مثل HEAD.

ب) می‌تواند متقاطع باشد مثل صفحه HGFE و می‌تواند موازی باشد مثل صفحه DHGC



ج) ــ می‌تواند شامل خط دیگر باشد مثل صفحهٔ EHGF

ــ می‌تواند موازی باشد مثل صفحه ADCB

ــ می‌تواند مطابق شکل هر دو را قطع کند

حل تمرین‌های فصل

تمرین صفحهٔ ۸۴ درس اول

۱ الف) دو صفحه

ب) نقاط B و C و E

ج) نقاط A و B و C و D

د) متنافر ــ متقاطع

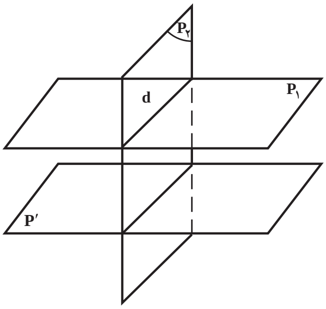
۲ الف) خط‌های d_1 و d_2 صفحه P را قطع کرده‌اند (در نقطه C) ــ یا شامل هر دو خط است و یا یکی از خطوط صفحه را قطع کرده و خط دیگر در صفحه واقع است.

ب) d_1 در صفحه P واقع است و خط d_2 صفحه P را در نقطه C قطع کرده است.

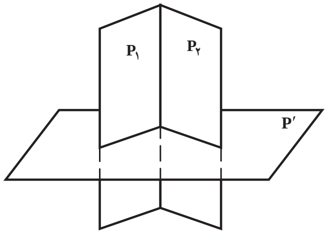
ج) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

د) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحه P واقع‌اند.

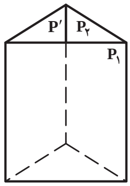
۳ الف) متقاطع



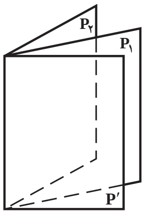
ب) متقاطع ولی شکل آن در ۳ حالت قابل رسم است.



یا



یا



۴ الف) صفحات EFIH و FGJI متقاطع‌اند.

هر یک از صفحات EFIH و FGJI با صفحه ABCD منطبق‌اند.

ب) موازی ج) متقاطع د) منطبق هـ) موازی و) خط بر صفحه واقع است.

۵ الف) صفحات با هم متقاطع‌اند. (دوبه‌دو) ب) متقاطع ج) موازی

د) خط EH در صفحه EIKH و ABCD واقع است و با صفحه JFGL موازی است.

هـ) متقاطع و) متنافر ت) متنافر

۶ الف) صفحات EIKH و FJLG موازی‌اند.

هر یک از صفحات EIKH و FJLG با صفحه ABCD متعامد(متقاطع) است.

ب) موازی ج) موازی د) موازی هـ) موازی

۷ الف) (AB و DE) (AC و DF) (BC و EF)

ب) (AC و BE) (EF و AD) (AB و CF)

ج) (AB و BC) (DF و CF) (AD و DE)

د) (AB و BC و BE) (AC و BC و CF) و ....

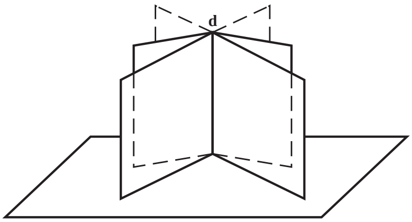
هـ) (خط BE و صفحه ACFD) (خط CF و صفحه ABED) (خط AD و صفحه BCFE)

و) (ABC و DEF)

ز) (ABED و BCFE و ACFD)

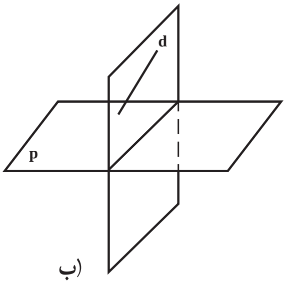
۸ یک خط

۹ الف) بی‌شمار صفحه



الف)

ب) یک صفحه



ب)

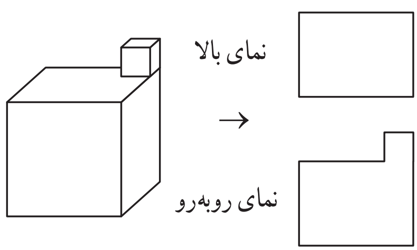
۱۰ موازی

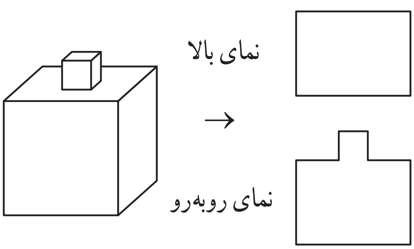
۱۱ عمود

حل تمرین‌های فصل

کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۸۹

این مسئله بی‌شمار جواب دارد که به ذکر ۲ جواب بسنده می‌کنیم.





تمرین صفحهٔ ۹۰ درس دوم

۱ ۵

۲ شکل اول سمت راست به ردیف چهارم — شکل چهارم سمت راست به ردیف دوم

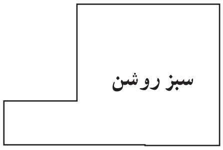
شکل دوم سمت راست به ردیف اول
شکل پنجم سمت راست به ردیف سوم
شکل سوم سمت راست به ردیف پنجم

۳ نماهای شکل سمت راست

نمای بالا

نمای چپ

نمای روبه‌رو

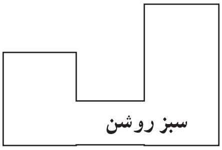


نماهای شکل سمت چپ

نمای بالا

نمای چپ

نمای روبه‌رو



۴

ــ ۶۴ تا

ــ ۸ تا

ــ ۶۴−۸=۵۶

ــ ۲۴ تا

ــ ۸ تا

۵ کل وجه‌ها ۴۸=۸×۶

در ۱۵ وجه حرف A دیده نمی‌شود پس در ۳۳=۱۵−۴۸وجه حرف A دیده می‌شود.

۶ ۴۸=۱۶×۳ مکعب

ــ حداقل ۱۵ تا و حداکثر ۳۷ تا

مجله ریاضی

ــ (۲)

ــ (۱)

ــ (۳)

تمرین صفحهٔ ۹۴ درس دوم

۱ الف) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.

ب) سطح مقطع مثلث است و منشور به دو هرم تجزیه می‌شود. یک هرم مثلثی و یک هرم با قاعده مستطیل

ج) سطح مقطع مستطیل است و منشور به دو منشور مثلثی تجزیه می‌شود.

۲ الف) مستطیل ب) مثلث (متساوی‌الساقین) ج) ذوزنقه (متساوی‌الساقین)

۳

شعاع دایره سطح مقطع $۲۵=۹+r^۲ \rightarrow r^۲=۱۶ \rightarrow r=۴$

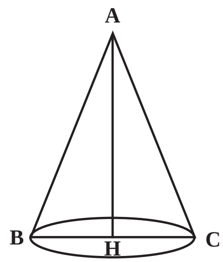
مساحت سطح مقطع $S=۱۶\pi$

۴ دایره ـ مخروط

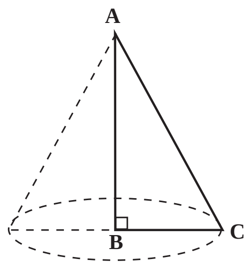
تمرین صفحهٔ ۹۶ درس دوم

۱ جسم حاصل دو مخروط است که از رأس به هم چسبیده‌اند.

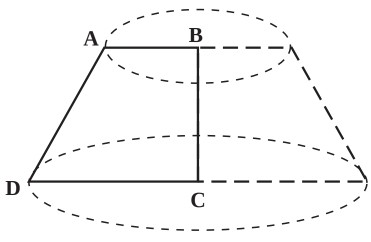
۲ الف) حول ارتفاع وارد بر قاعده تشکیل یک مخروط می‌دهد.(منظور ارتفاع وارد بر قاعده مثلث است)



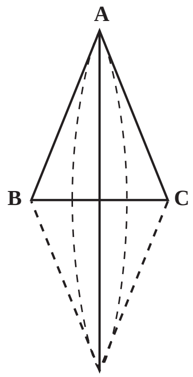
ب) مخروط



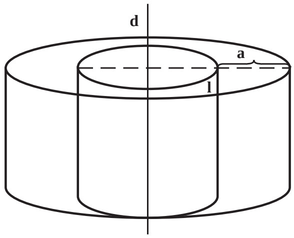
پ) مخروط ناقص



ت) دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند.



۳ شکل حاصل از این دوران یک استوانه به شعاع قاعده a+l است که در داخل آن استوانه‌ای به شعاع قاعده l خالی است.



۴ دایره ــ بیضی