فصل ششم : ترکیبات

وَ إِنْ تَعُدُّواْ نِعْمَةَ اللّهِ لا تُحْصوُها

و اگر بخواهید نمی‌توانید نعمت‌های خدا را بشمارید.

«سورهٔ نحل»

درس اول : شمارش

شاید شمارش درنظر برخی یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و یک عمل ساده درنظر گرفته شود. امّا آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟

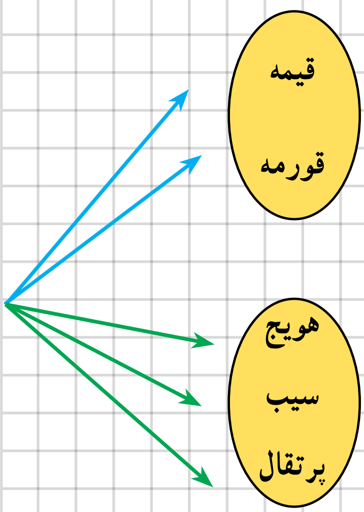
می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت زیر، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان پلاک کرد؟

۹۷ ج ۲۴۵	۴۱

اصل جمع و اصل ضرب

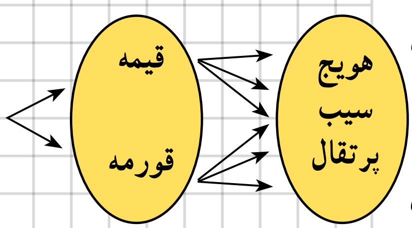
فعالیت

ــ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آبمیوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود تنها یکی از ۲ نوع غذای قورمه یا قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آبمیوه‌فروشی برود تنها یکی از سه نوع آبمیوهٔ هویج، سیب، پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟



هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آبمیوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آبمیوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد.

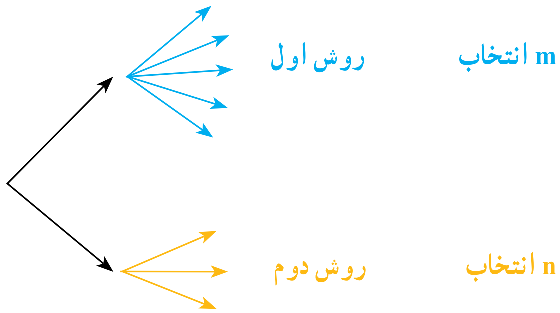
امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟



چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های لیست‌های انتخابی رستوران و آبمیوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد و در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m+n روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار موردنظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در مثال ۱ امین فقط یکی از کارهای رستوران بردن و یا آبمیوه‌فروشی بردن را انجام می‌دهد.»

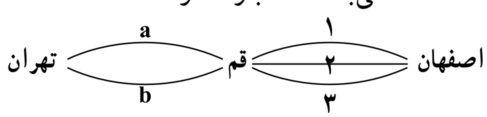
تعمیم اصل جمع : اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد و در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب و ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1+m_2+...+m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد و برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با m×n روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم رستوران رفتن که مرحلهٔ اول است انجام می‌گیرد و هم آبمیوه‌فروشی رفتن که مرحلهٔ دوم است صورت می‌پذیرد.»

مثال : فردی قصد دارد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها ۶=۳×۲ می‌باشد که عبارتند از



a,۳   a,۲   a,۱

b,۳   b,۲   b,۱

تعمیم اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد و برای انجام مرحلهٔ اول m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوم m_2 روش و ... و برای انجام مرحلهٔ kام m_k روش وجودداشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱ــ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب یک گل و یا یک شیرینی برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد عبارتند از مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او درنظر دارد عبارتند از گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد.

۲ــ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد هم یک گل بخرد و هم یک شیرینی بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

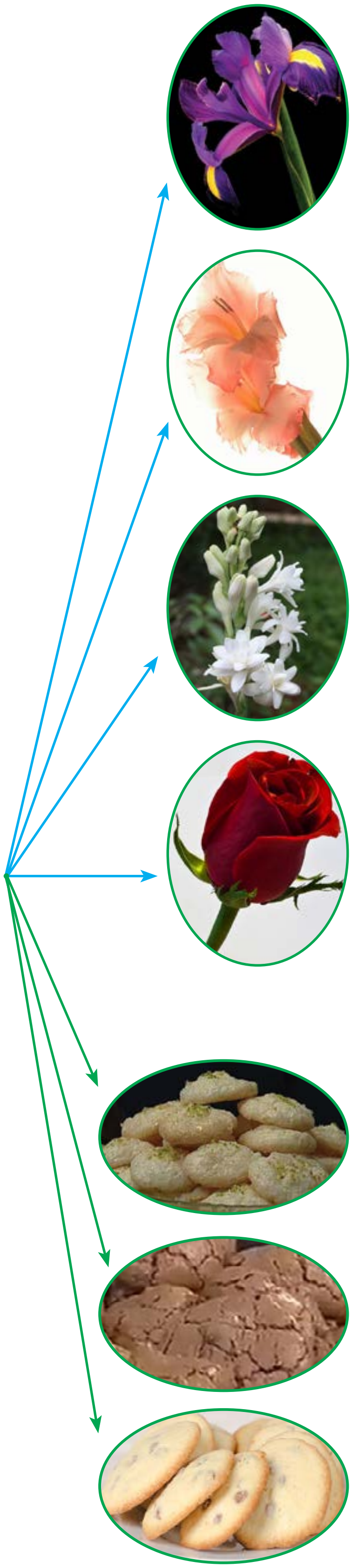
۳ــ چرا با اینکه در هر دو قسمت قبل با تعداد انتخاب‌های ۳ و ۴ مواجه هستیم، تعداد حالت‌های ممکن در دو قسمت برابر نیستند؟

۴ــ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال : فردی قصد دارد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد یا با اتومبیل خود و یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود این سفر را انجام دهد مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل : اگر با اتومبیل برود طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.



مثال : رمزی از سه حرف که می‌توانند فارسی یا انگلیسی باشند بدین صورت تشکیل شده است که حروف کنار هم از یک زبان نیستند. برای این رمز چند حالت ممکن است؟

حل :

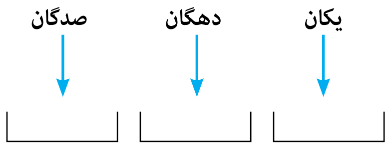
حالت اول : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف فارسی باشد : ۲۶۶۲۴=۳۲×۲۶×۳۲

حالت دوم : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف انگلیسی باشد : ۲۱۶۳۲ = ۲۶×۳۲×۲۶

تعداد حالات ممکن : ۴۸۲۵۶=۲۱۶۳۲+۲۶۶۲۴

کار در کلاس

الف) می‌خواهیم ببینیم با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت. (به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ دو تا از این اعداد هستند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت.



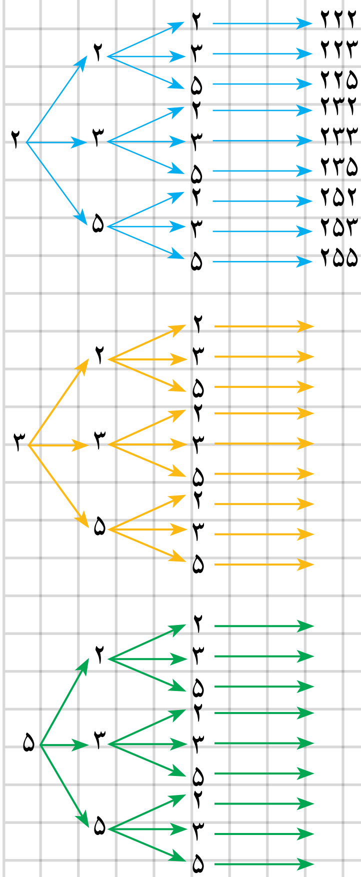
بنابراین کاری است که سه مرحله دارد و هر سه مرحلهٔ آن باید انجام شود، لذا برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شده و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد، لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲

تعداد حالت‌ها ...... × ...... × ...... =

با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت کنید و آن را تکمیل نمایید.



ب) می‌خواهیم ببینیم با همان سه عدد چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد.

۱ــ برای پرکردن خانهٔ اول چند حالت امکان دارد؟

تعداد حالت ها ⟵ ....

۲ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین خانه گذاشته‌ایم، برای پرکردن خانهٔ دوم چند حالت امکان دارد؟

یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ⟵ ....

۳ــ برای پرکردن خانهٔ سوم چند حالت وجود دارد؟

یک عدد قرار گرفته است | یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ←

لذا ...... = ... ×...... × ...... عدد سه رقمی توسط ۱ و ۲ و ۳ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

ج) می‌خواهیم ببینیم با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت.

۱ــ خانهٔ سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲ــ دو خانهٔ دیگر هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ...... = ... ×...... × ......

د) می‌خواهیم ببینیم با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت.

۱ــ خانهٔ سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲ــ پس از پرکردن خانهٔ سمت راست خانهٔ وسط، به چند طریق می‌تواند پر شود؟

۳ــ پس از پرکردن دو خانهٔ سمت راست و وسط خانهٔ سمت چپ به چند طریق می‌تواند پرشود؟

۴– لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با .....=.....×.....×.....

مثال : با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

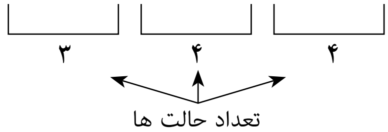
ج)چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

د) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

حل :

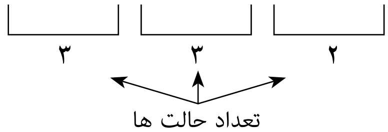
الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی‌تواند باشد لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل می‌باشد.

لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می‌توان نوشت.



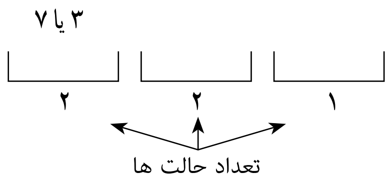
۳×۴ × ۴=۴۸

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکرار باشند لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل می‌باشد. لذا ۱۸ عدد می‌توان نوشت.



۳×۳×۲=۱۸

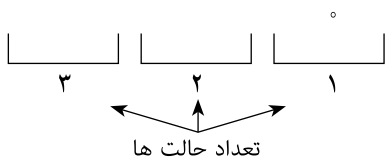
ج) چون عدد موردنظر باید زوج باشد لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲سمت راست باشد رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد لذا باید دو حالت زیر را درنظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.



حالت اول : اگر رقم سمت راست ۲ باشد یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.

۲ × ۲ × ۱=۴

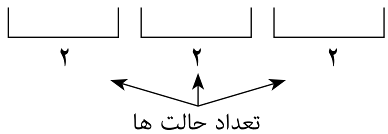
حالت دوم : اگر رقم سمت راست ۰ باشد حالت‌های جایگاه‌ها مطابق مقابل می‌باشد.



۳ ×۲ × ۱=۶

لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

د) راه حل اول : با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد. لذا تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.



۲ ×۲ × ۲= ۸

راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (ج) و (د) می‌توان به‌صورت زیر جواب را محاسبه کرد :

۸=۱۰–۱۸= جواب قسمت (ج) – جواب قسمت (ب)

تمرین

۱ــ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید.و مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده کردید یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده است که یا یک عدد است و یا یک حرف انگلیسی است.

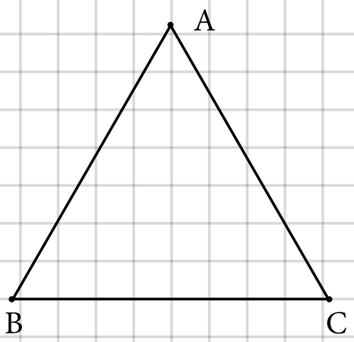
ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف انگلیسی است.

ج) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف انگلیسی است.

د) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عدد هستند و یا هر دو گزینه حروف انگلیسی هستند.

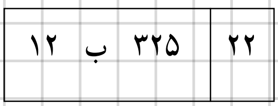
هـ) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری هستند.

۲ـ فردی قصد دارد برای پرکردن یک فرم آماری به‌طور تصادفی به یک کارخانه برود. او برای این‌کار به شهرکی صنعتی می‌رود.
در این شهرک ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد انتخاب‌های او چند تاست؟



۳ـ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.
الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟
ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل هستند هم رنگ نباشند.
ج) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم بررسی کنید.

۴ـ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود چند ماشین را می‌توان پلاک کرد؟



A={۱۱,۲۲,......,۹۹}

B={۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶ ,۷ ,۸ ,۹}

C={ی ,ه ,و ,ن ,م ,ل ,ق ,ط ,ص ,س ,د ,ج ,ب}

۵- در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل ، ۱۰ رنگ ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.
الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟
ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد ، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می شود؟
ج) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

۶ – اغذیه فروشی به مشتری های خود اجازه می دهد که ساندویچ خود را با تمام ویا چندتا از مخلفات زیر و یا بدون آنها سفارش دهند. سس ، ترشی معمولی ، ترشی تند ، قارچ ، کاهو ، پیاز و پنیر . یک مشتری پس از انتخاب ساندویچ خود به چند طریق می تواند آن را سفارش دهد؟

۷ – یک آزمون تستی شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه ای و ۵ سوال ۲ گزینه ای (بله – خیر) می باشد و فردی قصد دارد به سوال ها بصورت حدسی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر :

الف) او مجبور باشد به همه سوال ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۸ – مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده درست باشد.

مسئله : چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت بطوریکه ....؟

حل : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه های نوشتن صدگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

درس دوم : جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به‌هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به‌درگاه مخصوص به‌خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ــ فرض کنید فیش‌ها را به نام‌های ۱ و ۲ و ۳ بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را درمربع‌های زیر بنویسید.

۱	۲	۳

۱	۳	۲

۲ــ آیا در سه مربع به‌هم چسبیده عددی می‌تواند تکرار شود؟

۳ــ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به‌صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پرشود؟

پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟

حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

حال با توجه به اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

.........×.........×.........×.........

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم یک **جایگشت** از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارتست از حاصلضرب

.........×.........×.........×.........

* به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و Δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

* تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف ت، ش، و، ا، ن، پ، ه می‌توان ساخت چندتاست. (بدون تکرار حروف)

* با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

* تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

* اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصلضرب نشان دهید.

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصلضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $۱!=۱$ $\quad ۲!=۱\times۲$ $\quad ۳!=۱\times۲\times۳$ و ......

قرار داد : $۰!=۱$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با ....

فعالیت

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۵!}{۴!}=\frac{۵\times\overbrace{۴\times۳\times۲\times۱}^{۴!}}{\underbrace{۴\times۳\times۲\times۱}_{۴!}}=۵$

ب) $\frac{۱۰!}{۹!}$

پ) $\frac{n!}{(n-۱)!}$

ت) $\frac{۸!}{۶!}$

ث) $\frac{۱۰!}{۸!}$

ج) $\frac{n!}{(n-۲)!}$

چ) $\frac{۸!}{۵!}$

ح) $\frac{۱۰!}{۷!}$

خ) $\frac{n!}{(n-۳)!}$

د) $\frac{n!}{(n-۴)!}$

ذ) $\frac{n!}{(n-۵)!}$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!}$

۲ــ حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) 9×8 ب) $9\times 8\times 7\times 6$

پ) $11\times 10\times 9$ ت) 8

ث) $n(n-1)$ ج) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

فعالیت

۱ــ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a , b ,d , e , f , s , t می‌توان نوشت، یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با ....

۲ــ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت را به‌دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟
- بنابراین تعداد کلمات سه حرفیِ موردنظر برابر است با ....

در واقع آنچه به‌دست آمد تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز و یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز می‌باشد.

۳ــ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید.

۴ــ اعداد به‌دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۵ــ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۶ــ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ($0\leq r\leq n$) را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با $p(n,r)$ نمایش می‌دهند و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال :

با حروف کلمهٔ «جهانگردی» و بدون تکرار حروف،

الف) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» کنار هم باشند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفیِ بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به‌دست آوریم لذا جواب برابر !۸ می‌باشد.

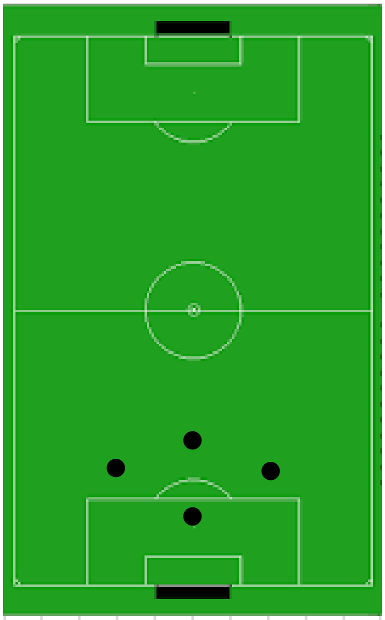
در حالتی که حرف آخر «ی» باشد کافیست تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به‌دست آوریم لذا در این حالت جواب برابر !۷ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالتِ «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیداکردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به‌صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند کافی است این دوحرف را یک حرف درنظر بگیریم لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به‌دست آوریم که برابر است با !۷. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد لذا جواب کلی برابر است با !۷×۲.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش‌تایی از هشت شیء متمایز یعنی $\frac{۸!}{۲!} = \frac{۸!}{(۸-۶)!} = P(۸,۶)$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص هستند لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمهٔ «جهان» را به‌دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار شیء متمایز یعنی $۱۲ = \frac{۴!}{(۴-۲)!} = P(۴,۲)$

ت) چهار حرف اول ، حروف کلمه "جهان" هستند که به !۴ حالت می توانند بیایند. حال ۴ حرف آخر را باید با ۴ حرف باقیمانده(گ ر د ی) نوشت که این کارهم به !۴ روش می توان انجام شود. لذا طبق اصل ضرب نوشتن کلمه مورد نظر به !۴ ×!۴ روش می تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمهٔ «جهان» در کنار هم برابراست با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی !۴. حال هر کدام از این جایشگت‌ها را که درنظر بگیریم برای نوشتن کلمهٔ ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار کلمهٔ «جهان») را یک حرف حساب کنیم لذا کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را



حساب کنیم که برابر است با $۵!$. لذا طبق اصل ضرب جواب برابر است با $۵! \times ۴!$.

کار در کلاس

۱ــ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

۲ــ با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

تمرین

۱ــ در هفته های پایانی یک لیگ فوتبال مشخص شده است که فقط پنج تیم بالای جدول شاخص قهرمانی دارند .به چند حالت مختلف تیم های اول تا سوم می توانند مشخص شوند ؟

۲ــ از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کرده و در قفسه ای بچینیم و این کار را به ۲۱۰ روش می توانیم انجام دهیم. تعداد کتاب ها چند تاست؟

۳ــ کدامیک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶! = ۶ \times ۵!$ $۶! = ۳! + ۳!$

$۲ \times ۳! = ۶!$ $۸! = ۴! \times ۲!$

$۸! = \frac{۱۰!}{۱۰ \times ۹}$ $(۳!)^{۲} = ۹!$

۴ــ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ دکمه است برای انجام یک دستور خاص باید سه دکمه مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند . اگر فردی نداند سه دکمه مورد نظر کدامند و بخواهد با حدس زدن این کار را انجام دهد و فشردن هر سه دکمه ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۵ــ با حروف کلمه " گل پیرا " و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با " گل" شروع می شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

ج) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف "پ" و "ر" در کنار هم آمده باشند؟

د) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه "پیرا" کنار هم آمده باشند؟

درس سوم : ترکیب

فعالیت

۱ـ همانطور که دیدید با پنج رقم ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ تعداد $۶۰ = \frac{۵!}{(۵-۳)!}$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارتند از :

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی دارند؟

۲ـ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضویِ مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را بنویسیم. این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

$\{۱,۲,۳\}$

۳ـ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

۴ـ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعهٔ سه عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟

۵ـ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود و این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

نتیجه : همان‌طور که مشاهده کردید در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینشِ هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعهٔ سه عضوی را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعهٔ ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو موردنظر اهمیت دارد. ازطرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

لذا با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با

$$\frac{P(n,r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به‌عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از n شیء یک ترکیب r تایی از n شیء نیز گفته می‌شود. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0\leq r\leq n)$$

مثال : از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به فردی انتخاب کنیم؟

حل :

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز یعنی $P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=360$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}=15$$

مثال : در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل گردد. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

الف) کمیته ۴ نفره باشد.

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد.

ج) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد.

د) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد.

هـ) کمیتهٔ ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد.

حل :

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند لذا تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با :

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{5!4!}=126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با $۴=\binom{۴}{۱}$ و به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد و لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با

$$۴\times۳\times۲=۲۴$$

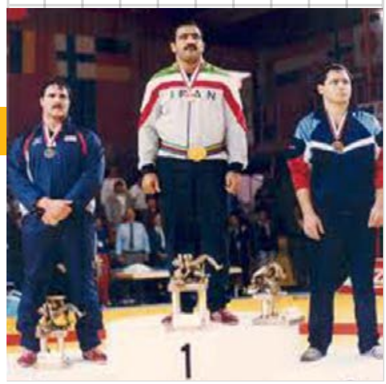
ج) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با $۶=\binom{۴}{۲}$. حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داورِ غیرایرانی انتخاب شوند که به $۱۰=\binom{۵}{۳}$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام کار برابر است با

$$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۳}=۶\times۱۰=۶۰$$

د) در این حالت تعداد داوران ایرانی یا ۳ نفر و یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی که تعداد داوران ایرانی ۳ نفر باشد این داوران به $۴=\binom{۴}{۳}$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفرِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $۱۰=\binom{۵}{۲}$ طریق می‌تواند انجام شود لذا طبق اصل ضرب $۴۰=۴\times۱۰$ روش وجود دارد.

در حالتی که تعداد داوران ایرانی ۴ نفر باشد انتخاب این ۴ داور به $۱=\binom{۴}{۴}$ روش صورت می‌گیرد و یک داورِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $۵=\binom{۵}{۱}$ طریق می‌تواند صورت گیرد لذا طبق اصل ضرب برای این حالت $۵=۱\times۵$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $۴۵=۵+۴۰$.

هـ) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با $۴=\binom{۴}{۳}$، تعداد روش‌های انتخاب ۲ داور ژاپنی برابر است با $۳=\binom{۳}{۲}$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با $۱=\binom{۲}{۲}$ لذا طبق اصل ضرب جواب برابر است با $۱۲=۱\times۳\times۴$.



کار در کلاس

۱ــ در کدام یک از موارد زیر ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) به چند حالت می‌توان کلمهٔ سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز نوشت؟ (با

معنی و بی معنی)

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.

پ) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم قرار است یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط انتخاب شود. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. به چند طریق ممکن است این سه نفر انتخاب شوند؟

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود. به چند طریق ممکن است این مدال‌ها بین افراد توزیع شوند؟

۲ـ در هر کدام از موارد کار در کلاس ۱ جواب را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)

۳ـ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیکدان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه :

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند.

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند.

ج) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد.

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیتهٔ دو نفره انتخاب شود به‌گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چندحالت برای انجام این‌کار وجود دارد؟

به‌جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است دقت کنید.

محمد : از دو تا از رشته‌ها باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشتهٔ سوم کسی انتخاب نشود لذا سه حالت زیر را می‌توان درنظر گرفت :

ریاضی یک نفر، فیزیک یک نفر و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}=۲\times۲\times۱=۴$$

ریاضی یک نفر، فیزیک کسی انتخاب شود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}\binom{۲}{۱}=۲\times۱\times۲=۴$$

ریاضی کسی انتخاب نشود، فیزیک یک نفر و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}=۱\times۲\times۲=۴$$

لذا در کل ۱۲=۴+۴+۴ حالت امکان دارد.

پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد یعنی یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های انتخاب دو رشته‌ای که قرار است از آنها کسی انتخاب شود را محاسبه می‌کنیم که به $\binom{۳}{۲}$ راه امکان دارد حال از هر کدام از دو رشتهٔ انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب کرد لذا جواب برابر است با $\binom{۳}{۲}\times۲\times۲=۱۲$.

حمید: ولی من فکر می‌کنیم مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن‌را حل کرد.
اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد لذا ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد دومین فردی که قرار است انتخاب شود نمی‌تواند هم رشتهٔ او باشد لذا برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر ۲۴=۴×۶ حالت می‌باشد.

ـ دو نفر مدرس ریاضی را $M_۱$ و $M_۲$، دو نفر مدرس فیزیک را $P_۱$ و $P_۲$ و دو نفر مدرس شیمی را $C_۱$ و $C_۲$ درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص نمایید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن‌را مشخص نمایید.

فعالیت

۱ـ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های r تایی از n شیء متمایز می‌باشد. حال $\binom{n}{۰}$ و $\binom{n}{۱}$ را یکبار با توجه به این تعبیرِ $\binom{n}{r}$ و یکبار با توجه به فرمول آن به‌دست آورید.

۲ـ

الف) یک مربی قصدداردد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟
با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۴ ,۵	۱ ,۲ ,۳
۳ ,۵	۱ ,۲ ,۴

ب) این‌بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که بر روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟

ت) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{n}{r}$ و $\binom{n}{n-r}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟ با استفاده از فرمول نیز ثابت کنید این دو مقدار با هم برابرند.

۳ــ با توجه به فعالیت‌های ۱ و ۲ مقادیر $\binom{n}{n-r}$ و $\binom{n}{n}$ را به‌دست آورید.

۴ــ جاهای خالی را پرکنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضویِ حروف انگلیسی برابر است با $\binom{\ }{\ }$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضویِ حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با $\binom{\ }{\ }$

ج) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضویِ حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست برابر است با $\binom{\ }{\ }$

د) بنابراین $\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }=\binom{\ }{\ }$

۵ــ فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی است و a یکی از n عضوِ A باشد. $(a\in A)$

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ A برابر است با $\binom{\ }{\ }$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست برابر است با $\binom{\ }{\ }$

ج) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که aدر آنها نیست برابر است با $\binom{\ }{\ }$

د) بنابراین $\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }=\binom{\ }{\ }$

تمرین

۱ــ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخم کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲ــ یک اداره دارای ۱۸ پرسنل است. این اداره ۱ رییس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی می باشد. این اداره ماهانه باید جلسه ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود هرگاه :

الف) رییس و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند. (فقط یک کارشناس امور حقوقی)

ب) رییس و یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند. (فقط یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی)

ج) رییس و یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند. (فقط یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی)

۳ــ در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی هستند داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند و این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند تا بوده است؟

۴ ــ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

۵ ــ یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد، مشکیدارد اگر او با هر ترکیب هر دو رنگ یا تعداد بیشتری از این رنگ ها بتواند دقیقا یک رنگ جدید بدست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود اما تعداد رنگ های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۶ ــ هفت نقطه A وB و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که ریوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

۷ ــ یک آشپز دو نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد.

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند.

ج) سه ادویه هستند که نباید هر سه باهم استفاده شوند.

د) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچیک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند.