

درس اول : مفهوم تابع و بازنمایی های آن

بسیاری از پدیده های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. نوعی خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می شود. به مثال های زیر توجه کنید.
 دمایی که به ساعت معینی در روز نسبت داده می شود.
 قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می شود.
 نمره هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف تعلق می گیرد.
 عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می شود.

فعالیت ۱

در جدول های زیر مثال های بالا و مواردی دیگر با روشی متفاوت ارائه شده اند. هر جا لازم است جدول ها را کامل کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل نمایید.
 با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می توان به آن نسبت داد.
 در مورد بقیه جدول ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

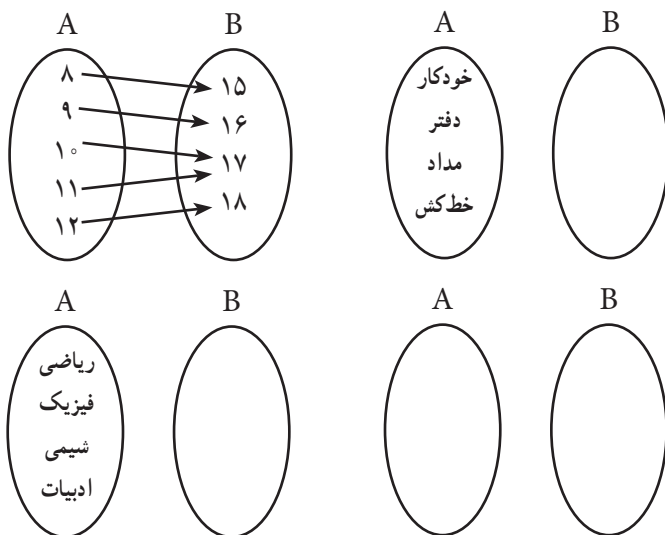
کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش	
قیمت	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

افراد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنج شنبه	

فعالیت ۲

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و بیگان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند مشخص کرد. به این نمودارها، نمودارهای بیگان می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



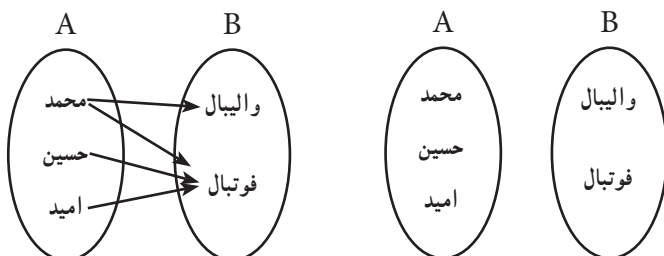
توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک بیگان خارج شده است. در ریاضیات اینگونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

یک تابع رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B است که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

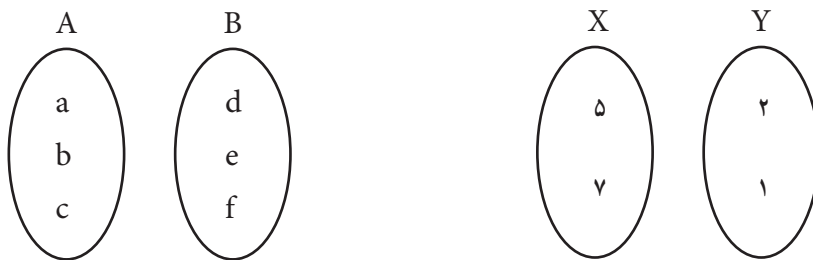
در فعالیت ۱، همه مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به صورت جدول نشان داده شده‌اند.

کار در کلاس

۱- مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل ورزش‌های مورد علاقه آنهاست. چرا رابطه داده شده در سمت چپ تابع نیست؛ در سمت راست نمودار بیگان را طوری رسم کنید که رابطه به دست آمده یک تابع باشد.

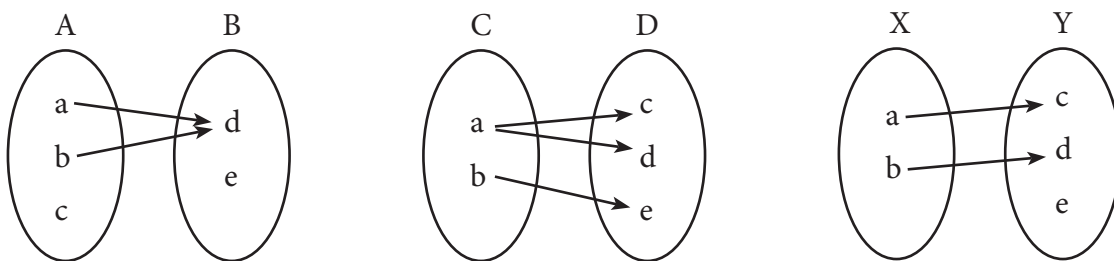


۲- بین دو مجموعه A و B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. برای دو مجموعه X و Y این کار را به گونه ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.



پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

۳- آ) آیا رابطه ای که به افراد سن آنها را نسبت می دهد یک تابع است؟ رابطه ای که به افراد وزن آنها را نسبت می دهد چطور؟
 ب) آیا رابطه ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می دهد یک تابع است؟ توضیح دهید.
 ج) کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟

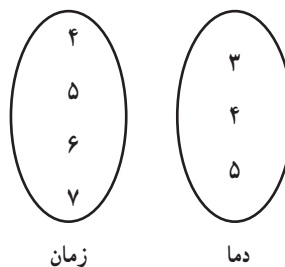
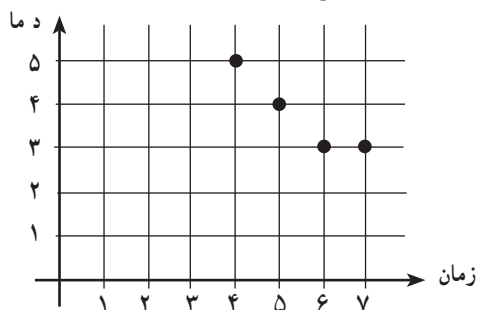


فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج های مرتب و نمودار مختصاتی

در نمودار زیر دمای هوا در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان داده شده است.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟



اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 3)$

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۴, ۵) و (۵, ۴) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج» مرتب می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

مجموعه f یک تابع است.

برای ساعت‌های دیگر دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

۱- نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید.

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز
جمعیت (میلیون نفر)						

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب هم نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

۲- در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل کنید و معلوم کنید که آیا رابطه داده شده یک تابع است؟

توصیف رابطه	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار پیکانی	جدول یا نمودار
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$		
	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$		
به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.			

- ۱- کدامیک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.
 (آ) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع محیط مربع را نسبت می‌دهد.
 (ب) رابطه‌ای که به هر فرد دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.
 (ج) رابطه‌ای که به هر فرد گروه خونی او را نسبت می‌دهد.
 (د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستان او را نسبت می‌دهد.
 (ه) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

- ۲- مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند.
 (آ) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.
 (ب) دو رابطه هم ارائه کنید که تابع نباشند.
 (ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نیز نمودار نمایش دهید.

۳- (آ) کدامیک از دو رابطه زیر یک تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$$

$$f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 10)\}$$

- (ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود معیاری به دست آورید:
 اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن

۴- کدامیک از مجموعه‌های زیر یک تابع است:

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

درس دوم : دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	۱۸۰°			

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{ (\text{پنج ضلعی}) \text{ و } (\text{لوزی}) \text{ و } (\text{مربع}) \text{ و } (۱۸۰^\circ \text{ و مثلث}) \}$$

چرا f یک تابع است؟

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا : {پنج ضلعی و لوزی و مربع و مثلث} = دامنه f

$$f \text{ برد} = \{۱۸۰^\circ \text{ و } ۳۶۰^\circ \text{ و } ۵۴۰^\circ\}$$

کاردر کلاس

۱- در جدول رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است.

جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{4}$	۲		
محیط	۲	۴				۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۲- (آ) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

(ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد.

فعالیت

۱- دنباله شکل های زیر را در نظر بگیرید :

شکل اول



شکل دوم



شکل سوم



شکل چهارم



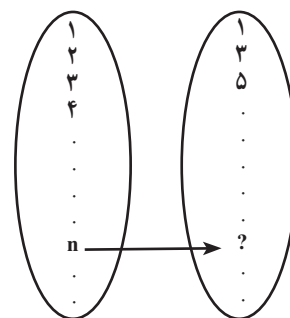
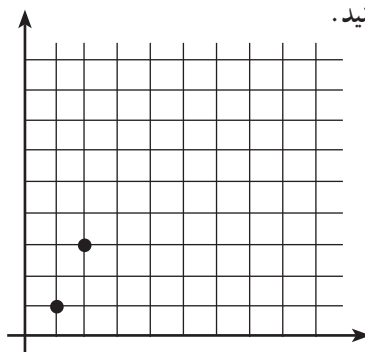
جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۰۰	n
تعداد دایره ها	۱	۳				

چرا این جدول یک تابع را نشان می دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100, \quad), \dots, (n, \quad)\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.



دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه هایی هستند؟ نام ببرید.

همان گونه که از نمایش های مختلف تابع دیده می شود عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می شود. به جای این می توان با یک قرارداد کار را ساده تر کرد. معمولاً می نویسند $f(1)=1, f(2)=3$ و گفته می شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۲ است و یا مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می توان نوشت :

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم.

در بسیاری از موقعیت ها کار با نمایش جبری یک تابع ساده تر و مناسب تر از کار با دیگر نمایش های تابع است.

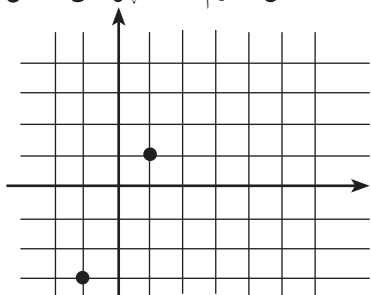


کار در کلاس

نمودار خط $y=2x-1$ را رسم کنید. از جدول زیر برای رسم نمودار استفاده کنید. جدول را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
y	۱	۳	۵	-۳				

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل معلوم کنید؟ چرا این جدول هم یک تابع را معلوم می‌کند؟ این تابع را g بنامید. نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n)=2n-1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.



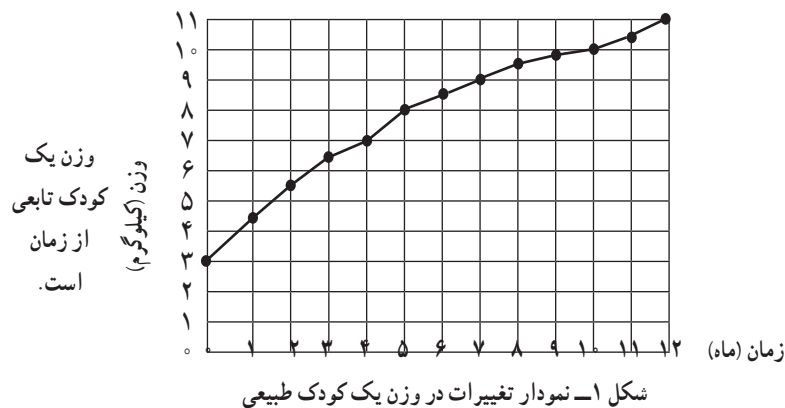
$g(\frac{2}{7}) =$ $g(0) =$

$g(-\frac{1}{5}) =$ $g(10) =$
 $f(x) =$

نمایش جبری تابع داده شده در این کار در کلاس را بنویسید. که در آن x یک عدد است.

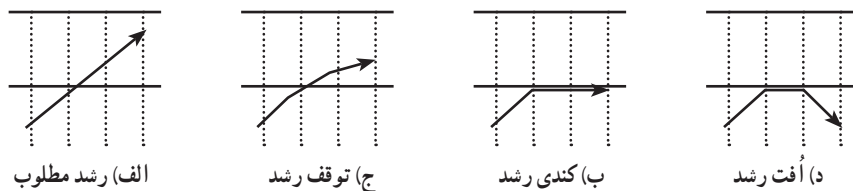
هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد یک تابع خطی نامیده می‌شود.

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن و یا قد یک کودک از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه را دیده باشید. شکل (۱) نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد.^۱



۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

هنگامی که پزشکان می‌خواهند در مورد رشد یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲

فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که در پایان هر ماه طی یک سال، توسط پزشک (با یک مرکز بهداشتی) ثبت شده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

(الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

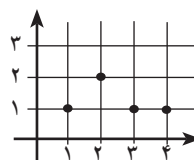
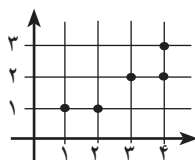
(ب) در چه فاصله زمانی وزن او ثابت مانده است؟

(ج) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

اگر چه وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید. (د) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار بی‌کافی آن را نیز رسم کنید.

کار در کلاس ۱

کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.

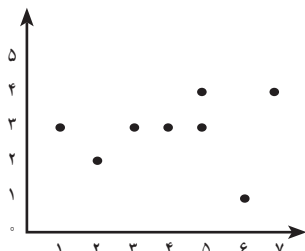
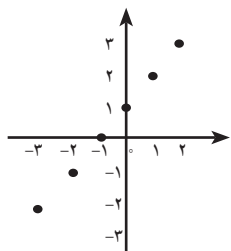


می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام که تابع است را معلوم کنید.
با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود به دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار در یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در قطع کند.

کار در کلاس ۲

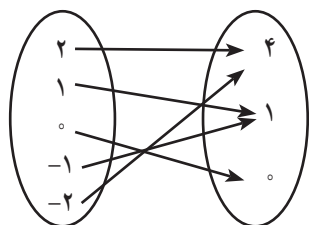
کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



(ب) (الف)

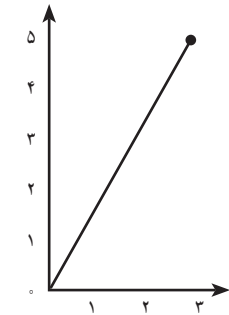
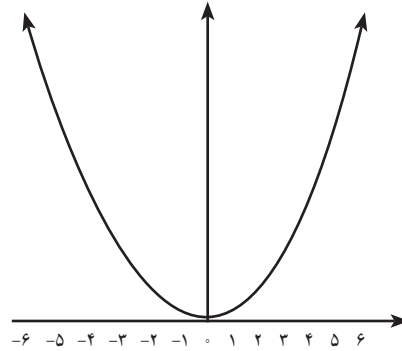
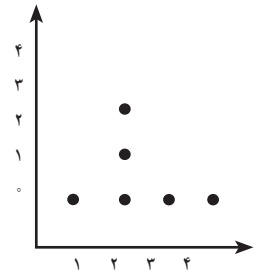
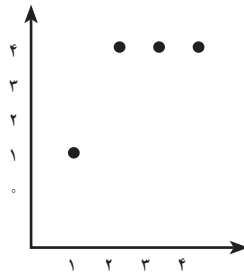
(و) (ه) (د) (ج)

(ی) (ط) (ح) (ز)



تمرین

۱- کدامیک تابع است؟



دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

۲- تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

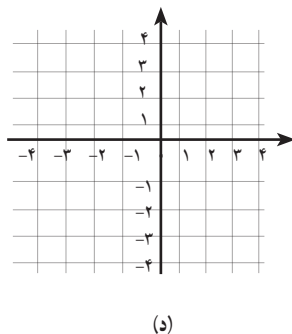
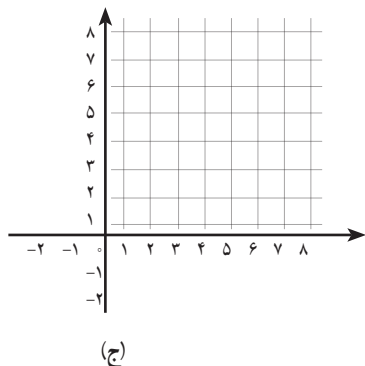
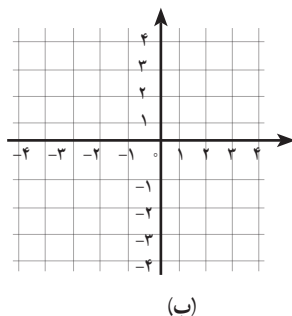
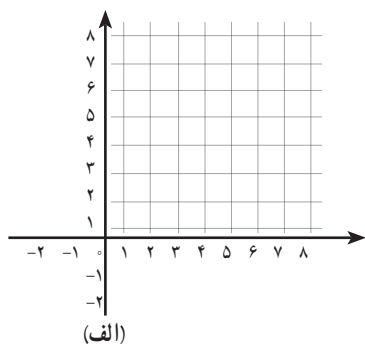
د) دامنه آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ه) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳- جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی که در جدول، توصیف شده‌اند را

رسم کنید.

	(ب)	(د)
تابع	$g(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	مجموعه اعداد حقیقی	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



برد

مجموعه اعداد حقیقی

۴- یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در طی ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

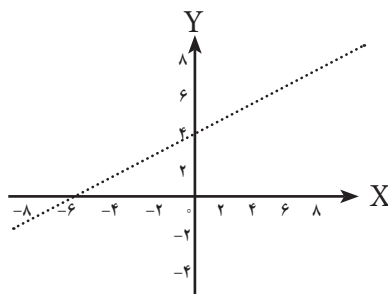
نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۵- آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ در مورد خط $y = 5$ چه طور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟
۶- معادله ای برای هر یک از توابع خطی داده شده با جدول های زیر بنویسید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
y	۶	۴	۲	۰	-۲	-۴

۷- نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است به دست آورید.
از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدامیک مناسب تر است؟



۸- جدول زیر دمای سنگ های زیر زمین را در عمق های متفاوت زیر سطح زمین نشان می دهد:

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد و نمودار آن را رسم کنید.
ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.
ج) دمای یک سنگ که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است را بیابید.

۹- تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ را به دست آورید.

۱۰- برای یک تابع خطی می دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$.
نمودار این تابع را رسم کنید و معادله آن (نمایش جبری تابع) را بنویسید.

۱۱- آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲- علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می کند. اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی می کند را با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

ج) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

د) $f(t) = \frac{1}{2} - t$

۱۳- اگر در مورد تابع g داشته باشیم: $g(0) = 2, g(1) = 5, g(-2) = \frac{1}{3}, g(4) = 3$ ، g را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
- نمایش جبری تابع زیر را به دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
$f(x)$	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	-۳

۱۴- برای اندازه گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C » و «فارنهایت F » استفاده می شود که

$$\text{با رابطه } F = \frac{9}{5}C + 32 \text{ به یکدیگر وابسته هستند.}$$

الف) 20 - درجه سانتی گراد برحسب فارنهایت چه قدر می شود؟

ب) 104 درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟

ج) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست دهد.

د) آیا رابطه بین این دو واحد یک تابع خطی را معلوم می کند؟

۱۵- طول یک مستطیل 3 واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط

این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

درس سوم : انواع توابع

فعالیت

۱- جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{4}$	۱	۳		۲/۵			x
مساحت آن	۰/۰۱				۱۶			۱۴۴	

شعاع دایره	$\frac{1}{4}$	۲	۳	۵			r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π					

اگر x طول ضلع یک مربع باشد مساحت آن تابعی از است و به صورت $f(x) = \dots\dots\dots$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد مساحت دایره تابعی از است و به صورت $g(r) = \dots\dots\dots$ قابل نمایش است.

چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم از x و r بیان شده‌اند آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را بر حسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید :
 $V(r) = \dots\dots\dots$

توابعی که ضابطه‌های آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند را توابع چند جمله‌ای می‌نامیم. توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای هستند :

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

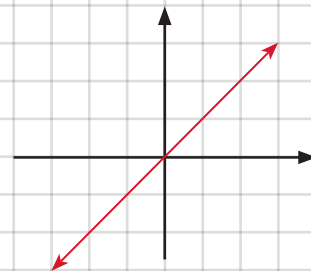
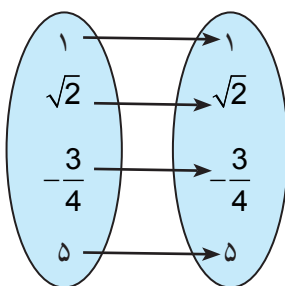
$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

۲- دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی دارند؟

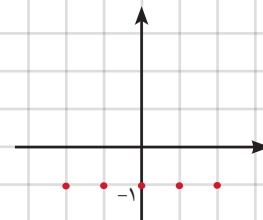
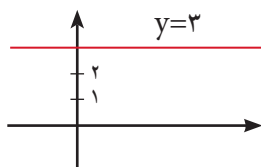
$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$



اگر هر عضو از دامنه یک تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم نمودار آن همان خط $y=x$ است که با معادله $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳- سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی مشترک هستند؟

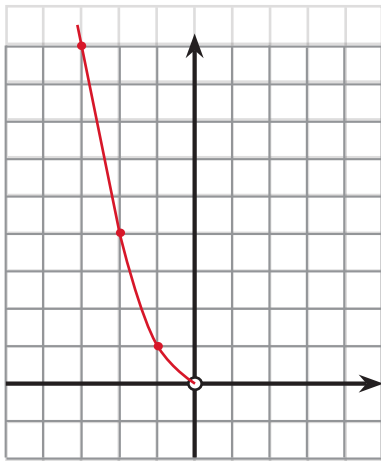
ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹



تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو است را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

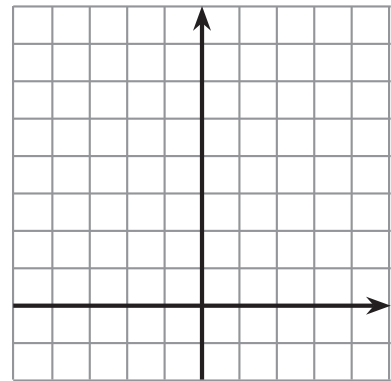
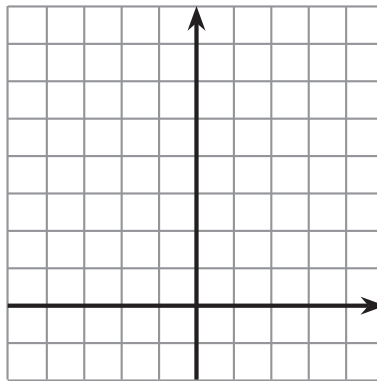
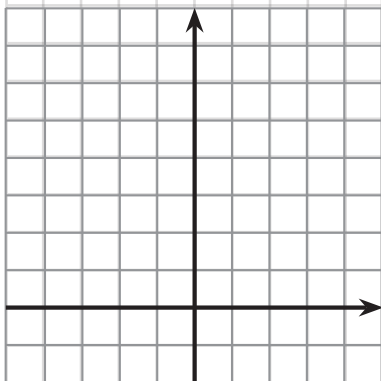
- مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید. یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد. یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند ولی تابع همانی نباشد. مثالی از دنیای واقعی از تابع ثابت ارائه کنید. مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.



۲- جدول زیر را کامل کنید. نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است.

تابع	$f(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$h(x)=x^2$	$t(x)=x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد				

دامنه و برد را روی شکل نیز توجیه کنید.



فعالیت

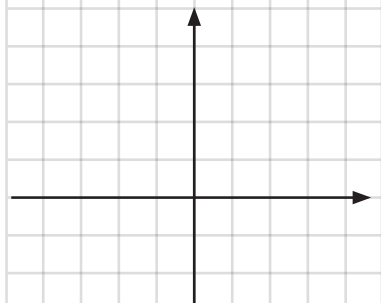
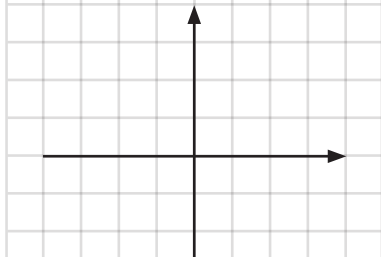
جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که به هر عدد قدرمطلق آن را نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر کنید و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.

x	-۲	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵
$f(x)$	۲	$\frac{1}{2}$				

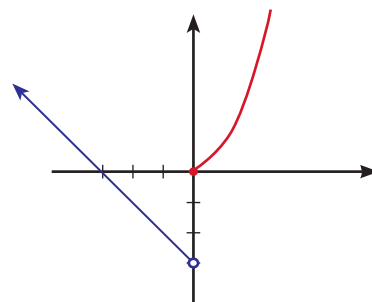
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد نمودار آن را رسم کنید.

تابع قدرمطلق را به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.



با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله‌های مختلفی هست، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.
 مثال: تابع مقابل نیز یک تابع قطعه‌ای است.



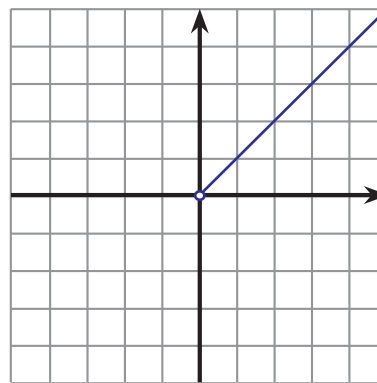
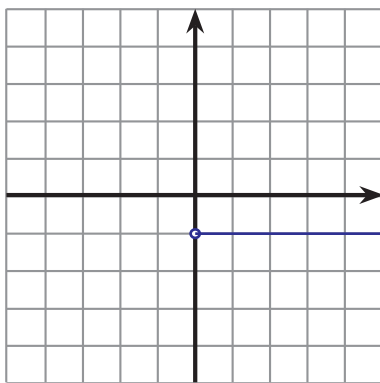
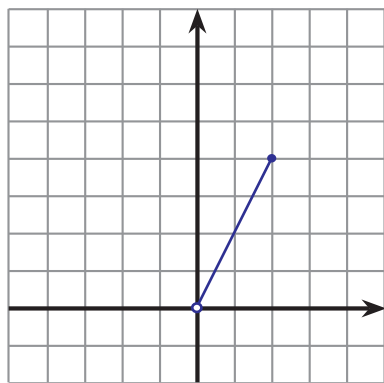
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعدادی که مثبت نیستند نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

فعالیت

توابع f و g و h و قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودار را کامل و مشخص کنید. هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز معلوم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 3 - x & x < 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

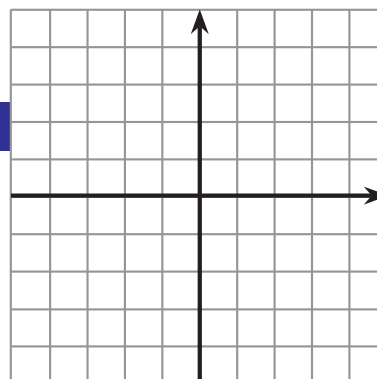


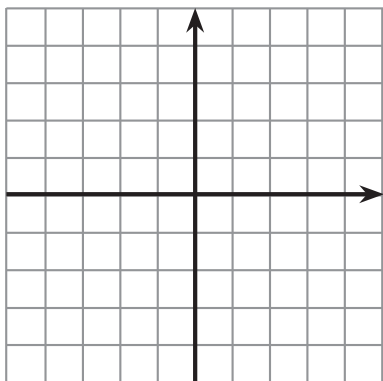
مقادیر $f(3)$ ، $g(-2)$ ، $f(-\frac{1}{5})$ ، $h(4)$ و $g(0)$ را بیابید.

کار در کلاس

۱- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

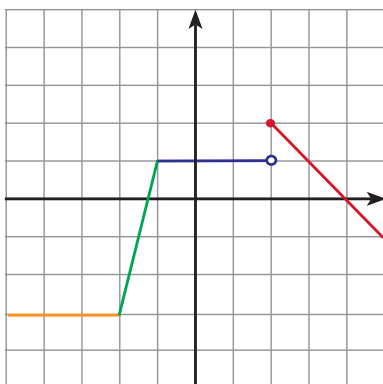
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$





$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$ و $g(0)$ و $f(5)$ و $g(2)$ و $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.



۲- نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه این تابع را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

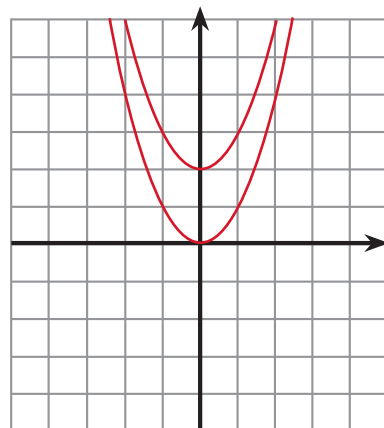
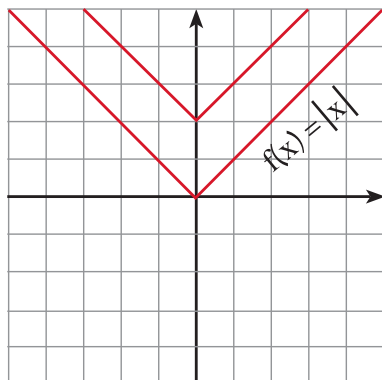
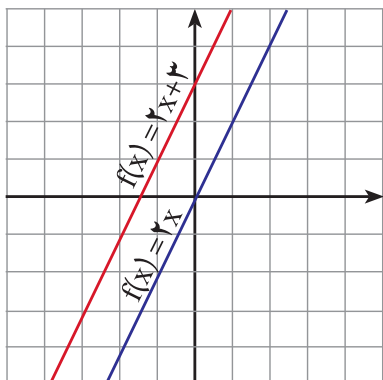
رسم برخی توابع به کمک انتقال

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع

$$f(x) = 2x - \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad g(x) = |x| - \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$$

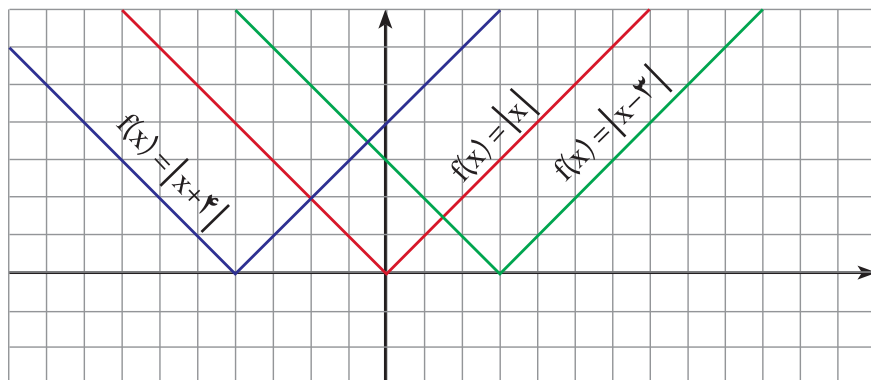
را به همین روش رسم کنید.



با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $k > 0$ انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

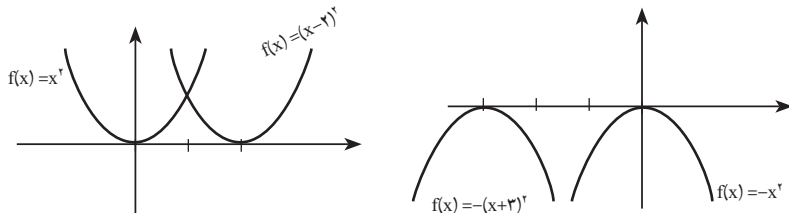
کار در کلاس

۱- در شکل زیر دامنه و برد توابعی که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند را بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ‌ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲- در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



کار در کلاس

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم زیر رسم شده‌اند.

$f(x) = (x-5)^2 - 2$

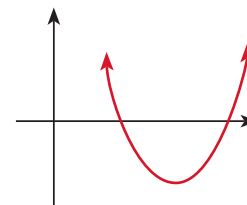
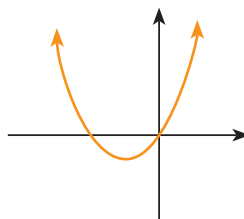
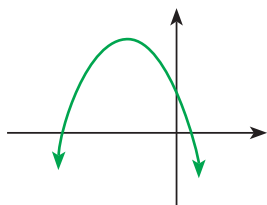
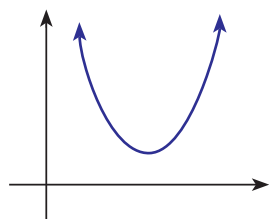
$f(x) = (x+1)^2 - 1$

$f(x) = (x-3)^2 + 1$

$f(x) = -(x+1)^2 + 3$

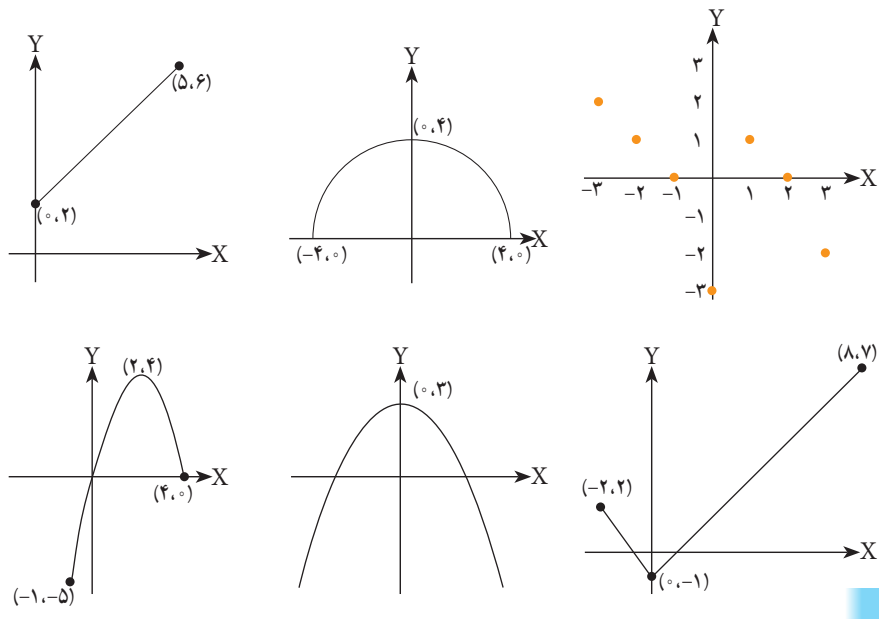
الف) تعیین کنید که هر یک از نمودارها چه تابعی را نشان می‌دهند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید :



۱- تابع $f(x) = 3x - 1$ که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است را رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیکنانی این تابع را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

۲- در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها معلوم کنید. در هر مورد که امکان دارد دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید.



۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, \infty)$ و بُرد آن نیز $(0, \infty)$ است.

ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, \infty)$ است.

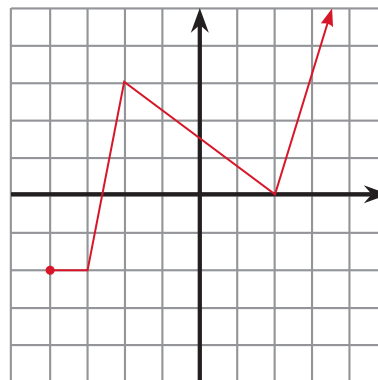
ج) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

د) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

۴- یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 3° متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵- نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.

$$f(3) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \quad f(0) \quad f\left(-\frac{5}{2}\right)$$



۶- نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 3)$ می‌گذرد. مطلوب است $f(-1)$ و $f(-4)$.

۷- هزینه مکالمه تلفنی با کشوری برای ۳ دقیقه یا کمتر ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را تا زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۸- کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟
نمودار هر کدام که تابع است را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 0 \end{cases}$$

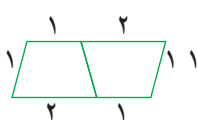
$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۹- الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.

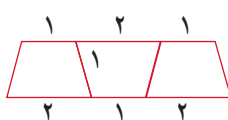
شکل اول



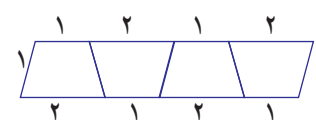
شکل دوم



شکل سوم



شکل چهارم



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار این تابع را رسم کنید.