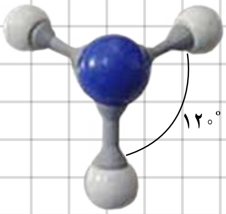
فصل چهارم : مثلثات

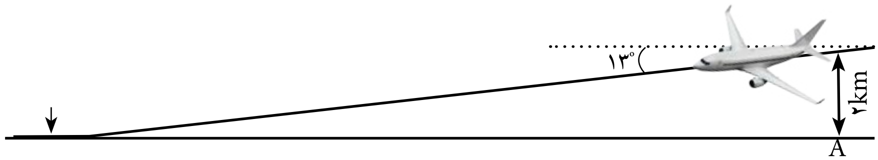
برای اینکه اتومبیل‌ها درپیچ بتوانند با سرعت نسبتاً زیاد حرکت کنند، جاده‌ها را شیب می‌دهند. یعنی جاده را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی نسبت به قسمت داخلی، مرتفع‌تر باشد.



درس اول : نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات از دو کلمه یونانی تشکیل شده است که به معنی مثلث و اندازه‌گیری هستند. موضوع این شاخه از ریاضیات، بررسی روابط بین زاویه‌ها و اضلاع یک مثلث است. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم هندسی فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد.

به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.

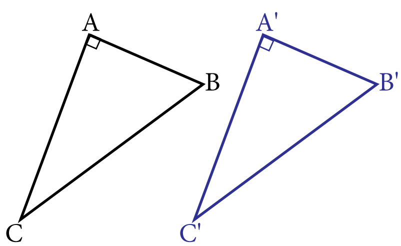


اگر زاویه هواپیما با افق ۱۳° باشد. می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و هزاران مسائل شبیه به آن با مثلثات حل می‌شوند. برای معرفی مفاهیم این فصل، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث (*n* ضلعی) با هم متشابه‌اند، هرگاه زاویای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ خواهیم داشت $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، $B=B'$ ، $C=C'$ و $A=A'$.
در هندسه ثابت می‌شود :

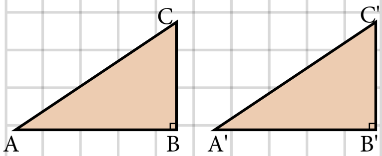
هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو با زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید :
اگر ABC و A'B'C' مانند شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه باشند و داشته باشیم ، C=C'
(که C و C' دو زاویه حاده باشند) آنگاه

$A\overset{\Delta}{B}C \;\square\; A'\overset{\Delta}{B'}C'$



فعالیت



۱ــ در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و A'B'C'، $\hat{A}=\hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \square\ \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{}=\frac{BC}{}$$

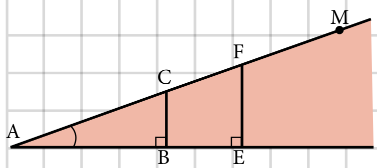
۲ــ از $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}$ (چرا؟) با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{AB}{BC}=\underline{\qquad}\quad \text{و} \quad \frac{AC}{BC}=\underline{\qquad}$$

نتیجه : اگر زاویه حاده A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه حاده A' از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشند داریم :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

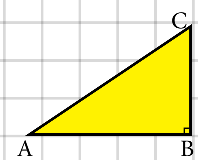
کار در کلاس



۱ــ در شکل، درستی تساوی $\frac{EF}{AE}=\frac{BC}{AB}$ را بررسی کنید.

۲ــ نقطه دیگری مثل M در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرزاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{MN}{}=\frac{}{AE}\ .$$



همانطور که در کار در کلاس ۲ دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم :

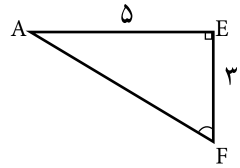
$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}=\frac{BC}{AB}\ .$$

عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت نامیده و آن را با cotA نشان می‌دهند. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}=\frac{AB}{BC}$$

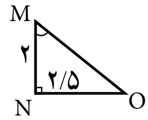
فعالیت

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



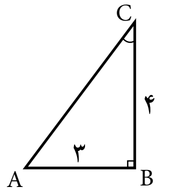
$\tan F = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

$\cot F = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{\quad}{۲/۵}$

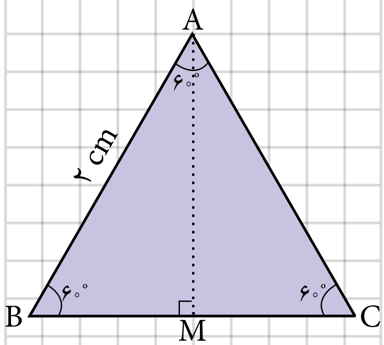
$\tan M = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{۳}$

$\cot A = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

۲ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول ۲ واحد را درنظر بگیرید.



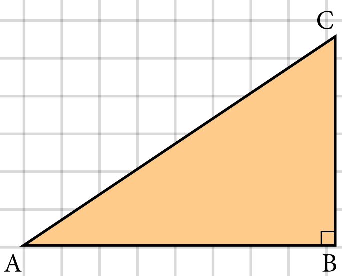
الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM .... پاره‌خط BC است. بنابراین

طول BM = طول MC = ...

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$\tan ۳۰^\circ = \frac{\text{طول } BM}{\text{طول } AM} = \frac{\quad}{\quad}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{\text{طول } AM}{\text{طول } BM} = \frac{\quad}{\quad}$.

ج) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه °۴۵ را پیدا کنید.



در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویه Aمی‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}\ .$$

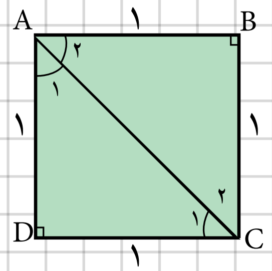
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس $\hat{A}$ نامیده و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{\quad}{\quad}$.

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و از این‌رو $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال :

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به‌طول ۱ واحد را رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.



فریبا : با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است داریم $(AD)^۲+(DC)^۲=(AC)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$ چون قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم : با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس .... $=\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$.

مبینا : طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\quad}{۲}$

سبا : من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{......}{......}=\frac{......}{......}=\frac{......}{......}\ .$$

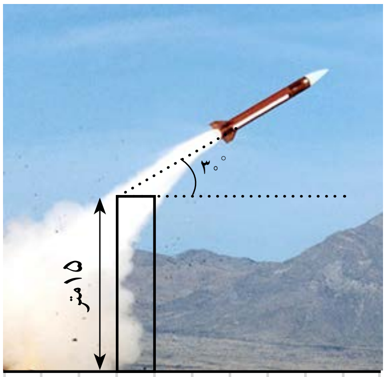
مریم : در مثلث قائم‌الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

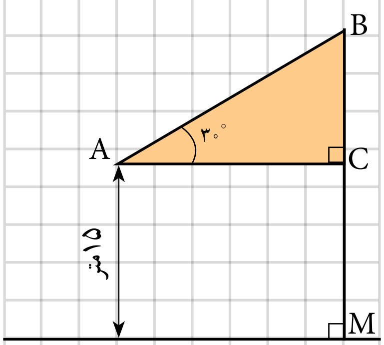
$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \ \text{و}\ \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت ۱، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را پیدا کرده و جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
$\cos\theta$		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$





مثال :

یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای مسئله به‌صورت روبه‌رو می‌سازیم. به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با

$$BC+MC=\dots\dots\dots+BC$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم.

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{\quad} \Rightarrow BC =$$

از این‌رو

ارتفاع موشک = ... + ... = ...

فعالیت

۱ــ

الف) یک زاویه ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقدار قبل مقایسه کنید.

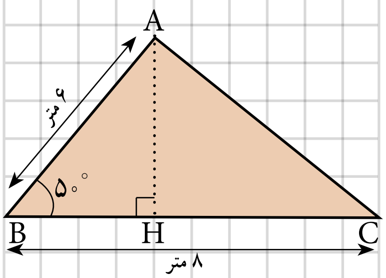
ب) با استفاده از قسمت الف) توضیح دهید، چگونه می‌توان نسبت‌های مثلثاتی $\hat{۴۰}$ را حساب کرد.

۲ــ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم مساحت مثلث ABC برابر است با

$\frac{۱}{۲}$ × قاعده × ارتفاع.

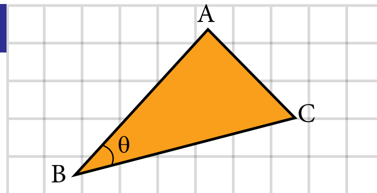
الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰ \simeq ۰/۷۶$، داریم

$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{\quad} \Rightarrow AH = \dots\dots\dots$$



ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

مساحت مثلث = $\frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots \simeq \dots\dots\dots$

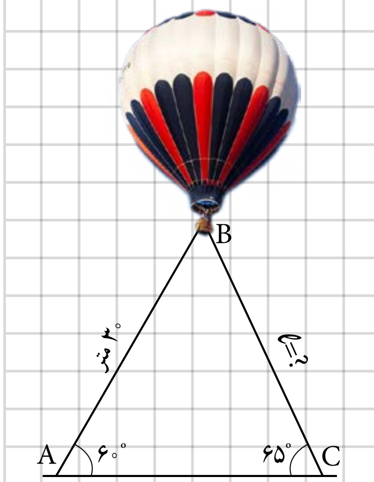


کار در کلاس

۱ـ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید :

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = AB \times BC \times \sin\theta$$

(می‌توانید به کمک ماشین حساب، نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را حساب کنید).



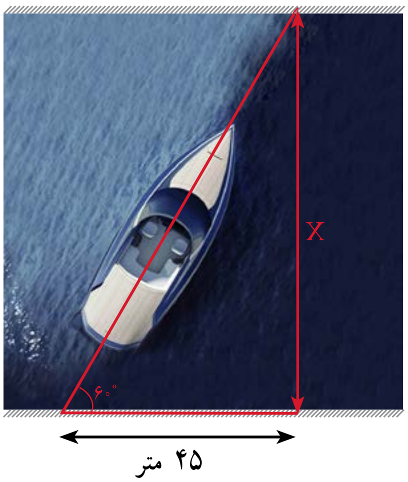
۲ـ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا زاویه B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم و آن‌را BH بنامید.

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به‌دست آورید.

ج) اکنون با استفاده از سینوس زاویه ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

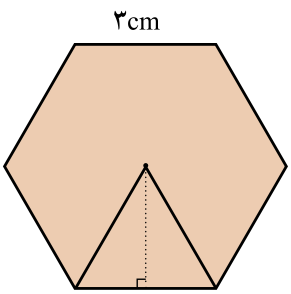
۳ـ امین می‌خواست عرض رودخانه زیر را به‌دست آورد. با توجه به شکل ابتدا راه حل او را توضیح دهید و سپس عرض رودخانه را پیدا کنید.



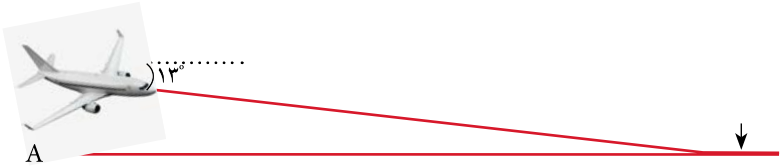
تمرین

۱ـ نسرین می‌خواست ارتفاع یک تیر برق که طول سایه آن ۳ متر است را حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. طول دکل چقدر است.

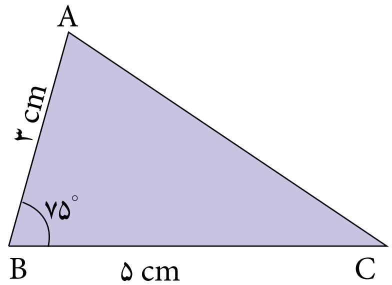
۲ـ مساحت شش ضلعی منتظم روبه‌رو را به‌دست آورید.



۳ــ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

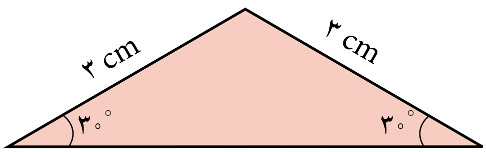


۴ــ فرض کنید $\cos 75^\circ \simeq 0/26$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.

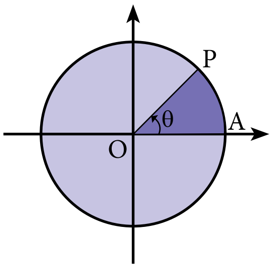


۵ــ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ توضیح دهید.

۶ــ مساحت مثلث زیر را پیدا کنید.

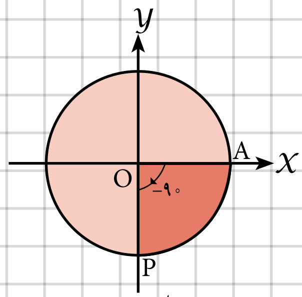


درس دوم : دایره مثلثاتی

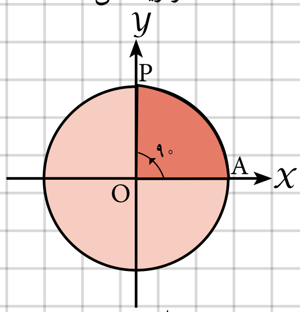


دایره روبه‌رو به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند زاویه AOP مثبت و در جهت عقربه‌های ساعت منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

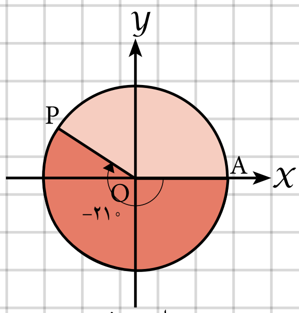
مثال : در هر یک از دایره‌های مثلثاتی مقابل، مقدار زاویه‌ها داده شده‌اند.



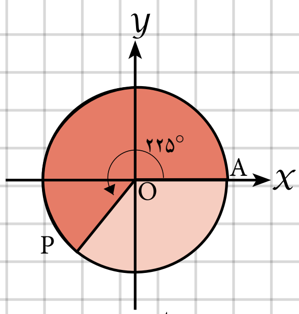
زاویه منفی



زاویه مثبت

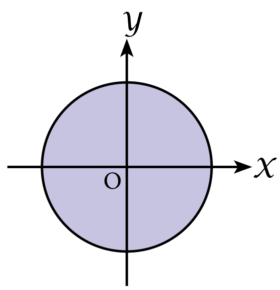


زاویه منفی

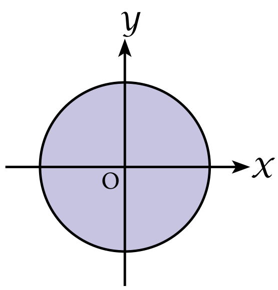


زاویه مثبت

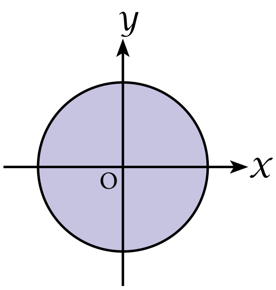
۱ــ هر یک از زاویه‌های زیر را، روی دایره مثلثاتی نشان دهید.



−۲۷۰

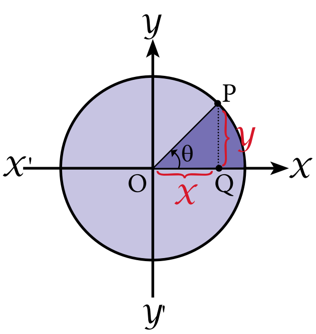


۱۳۵



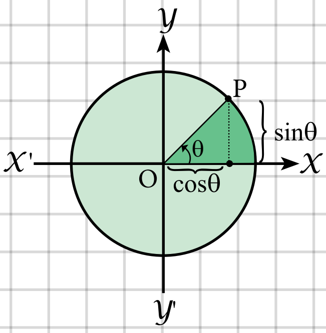
−۳۰

۲ــ فرض کنید P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی زیر باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{ox}$ می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور $\overrightarrow{ox}$ عمود کرده و محل برخورد را Q می‌نامیم.



الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

$\tan\theta=\cdots\cdots$ و $\sin\theta=\cdots\cdots$ و $\cos\theta=\cdots\cdots$



ب) با توجه به قسمت الف) می‌توان دید فاصله پای عمود نقطه P تا مبدأ با .... برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود یعنی نقطه Q با .... برابر است.

ج) با توجه به قسمت بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت که برای هر زاویه θ، $-1\leq\sin\theta\leq1$ و $-1\leq\cos\theta\leq1$ است؟ توضیح دهید.

با توجه به قسمت ب) محور x'ox یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور y'oy یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر، اگر P نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که OP با قسمت مثبت محور xها زاویه θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.
بنابراین

در دایره مثلثاتی، هر نقطه متناظر با یک زاویه و هر زاویه، متناظر با یک نقطه است.

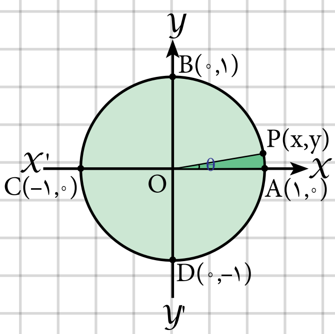
نکته : دو محور عمود بر هم x'ox و y'oy صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آنها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xoy را ربع اول، ناحیه x'oy را ربع دوم، ناحیه x'oy' را ربع سوم و ناحیه xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ــ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

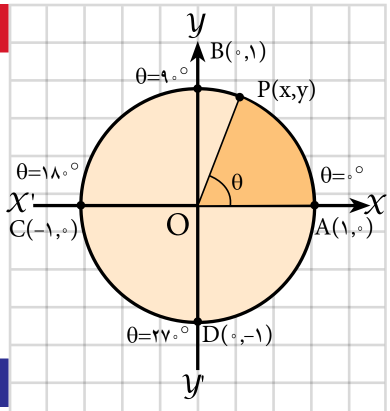
الف) -۳۰° ب) ۶۵° ج) ۱۸۲° د) -۹۵°

۲ــ با توجه به آنچه در فعالیت ۲ به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت می‌باشند.



مثال :

می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۰° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=۰^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می‌گیرد و داریم $\sin ۰^\circ=۰$، همچنین $\cos ۰^\circ=۱$ و $\tan ۰^\circ=۰$، اما $\cot ۰^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).



فعالیت

۱ــ در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=90^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲ــ اگر $\theta=180^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۳ــ اگر $\theta=270^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	°۰	°۹۰	؟	°۲۷۰	°۳۶۰
sinθ	۰		۰	۱−	۰
cosθ			۱−		
tanθ		تعریف نشده	۰		
cotθ			تعریف نشده		

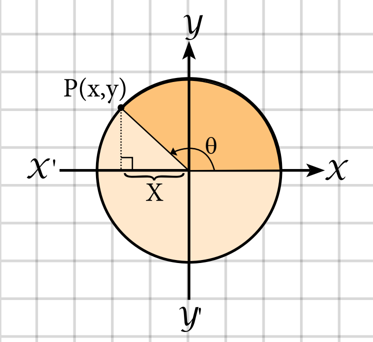
فعالیت

۱ــ فرض کنید θ زاویه‌ای در دایره مثلثاتی به‌غیر از °۱۸۰ و °۲۷۰ در ربع سوم باشد. با توجه به اینکه $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ و در ربع سوم، $x<0$ و y، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

۲ــ فرض کنید α زاویه‌ای در دایره مثلثاتی به غیر از °۹۰ و °۱۸۰ در ربع سوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

۳ــ جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	ربع اول $x,y>0$	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم ....
sinθ	+			
cosθ		−		
tanθ			+	
cotθ				−



مثال :

آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید، اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۲}{۷}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{۲}{۷}$ بنابراین P نقطه‌ای به عرض .... است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی : طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم $x^۲+y^۲=۱$. بنابراین ....

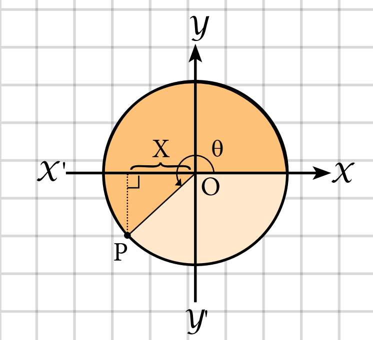
و در نتیجه $x^۲ = \frac{۴۵}{۴۹}$. اکنون با حل معادله بالا داریم .... = x.

معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع .... است پس طول نقطه P منفی است و از این‌رو ....=x قابل قبول است.

معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات (...... و ......) است. در نتیجه

$$\cos\theta = x = \frac{-۳\sqrt{۵}}{۷} \text{ ، } \tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{......}{......} \text{ و } \cot\theta = \frac{......}{......} .$$



فعالیت

۱ــ در هر یک از قسمت‌های زیر، نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد و $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین ....= $y = \cos\theta$.

الف) مختصات نقطه P را به‌دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

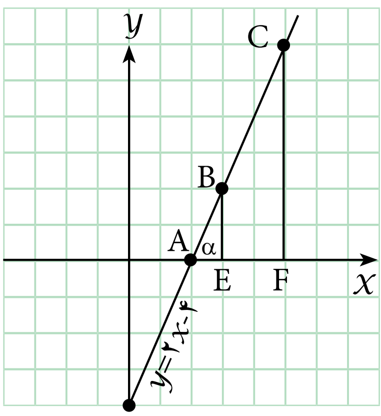
۳ــ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=۲x-۴$ در شکل زیر رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویه α را به‌دست آورید.



ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ج) از مقایسه قسمت الف) و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی است. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه $\tan\alpha$= شیب خط

کار در کلاس

۱ــ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف) $۲y-۳x=۵$ ب) $x+y=۲$

۲ــ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها ۳۰° است و نقطه $(۱,۰)$ روی آن قرار دارد.

تمرین

۱ــ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی نشان دهید و سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+۲۷۰$ ب) -۹۰° ج) -۱۳۵° د) ۱۸۵°

۲ــ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (در ربع چهارم)

ب) $\cos\beta = \frac{۱}{۲}$ (در ربع سوم)

۳ــ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۴ــ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

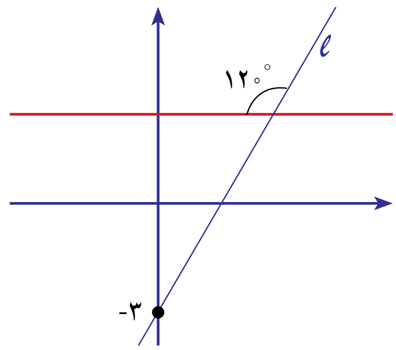
الف) $\sin\alpha>۰ , \cos\alpha>۰$ ب) $\sin\alpha<۰ , \cos\alpha>۰$

۵ــ اگر $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha<0$، آنگاه α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ چرا؟

۶ــ زاویه‌ای مثل β پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\beta > \cot\beta$. اکنون زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\cot\alpha > \tan\alpha$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷ــ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها 45° است و نقطه $(2,0)$ روی آن قرار دارد.

۸ــ با توجه به شکل زیر، معادله خط L را به‌دست آورید.

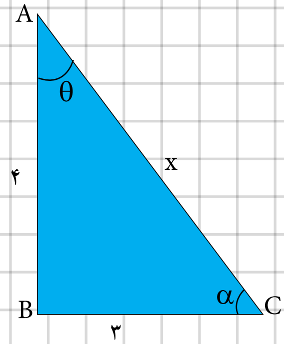


درس سوم : روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید



الف) اندازهٔ وتر یعنی x را یافته و سپس مقدار عددی هر یک از ۴ نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$\sin\alpha = \cdots\cdots\cdots$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{}$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{\cdots\cdots}$

$\cos\theta = \cdots\cdots\cdots$

$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \cdots\cdots\cdots$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{\cdots\cdots}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cdots\cdots\cdots$

$\cot\alpha = \cdots\cdots\cdots$

$\cot\theta = \frac{۱}{\cdots\cdots} = \frac{\cos\theta}{\cdots\cdots} = \cdots\cdots\cdots$

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)$ و $(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)$ را به‌دست آورید.

$(\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^۲=\sin^۲\theta)$

ج) درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta = ۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، در حالت کلی بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲ + (\cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^۲ + \left(\frac{AB}{AC}\right)^۲ = \frac{BC^۲ + AB^۲}{AC^۲} = \cdots\cdots\cdots$$

د) مشابه قسمت (ج) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha = ۱$ را بررسی کنید.

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد همواره داریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

ب) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

تذکر : در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید علامت + یا − با توجه به ناحیه‌ای که α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال :

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-4}{5}$ در این صورت مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \xRightarrow{\alpha\ \text{درناحیه سوم}} \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

۱ـ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\ldots\ldots\ldots}=\frac{1}{\ldots\ldots\ldots}$

$$\boxed{\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

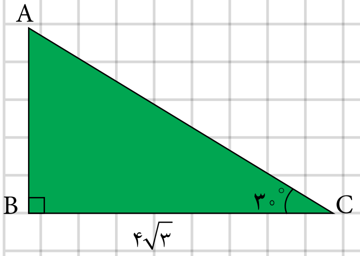
۲ــ می‌خواهیم مشابه ۱ رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس به‌دست آوریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\,\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$$

$$\boxed{\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به شکل مقابل اندازهٔ اضلاع مثلث ABC را محاسبه کنید.



$$\cos 30^\circ=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{4\sqrt{3}}{AC}$$

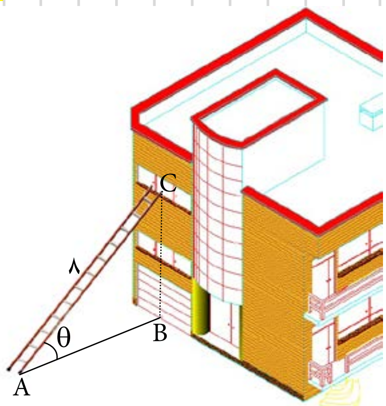
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\dots\dots\dots\Rightarrow AC=\dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow AB=AC^2-\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\Rightarrow AB=\dots\dots\dots\dots$$

۲ــ اگر $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ و $\tan\alpha=\frac{-3}{4}$ در این صورت سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

مثال :

مطابق شکل مقابل نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta=45^\circ$ باشد ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin\theta=\frac{\dots\dots}{8}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{BC}{8}$$

$$\Rightarrow 2BC=\dots\dots\dots\Rightarrow BC=\dots\dots\dots$$

از طرفی چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس AB=BC یعنی فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان نیز $4\sqrt{2}$ متر است.

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ ،\ 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ \text{و}\ 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک **اتحاد مثلثاتی** می‌نامیم.

$\sin\alpha$ و $\cos\alpha\neq 0$

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم یک تساوی بین دو عبارت مثلثاتی همواره برقرار بوده و یک اتحاد است می‌توانیم یک طرف تساوی را نوشته و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید :

مثال :

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta)(۱-\sin\theta)=\cos\theta$$

$$(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta)(۱-\sin\theta)=(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(۱-\sin\theta)$$

$$=(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta})(۱-\sin\theta)=\frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}۱-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta$$

کار در کلاس

درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(\sin^۴\theta-\cos^۴\theta)=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)$

$$(\sin^۴\theta-\cos^۴\theta)\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=}(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=\cdots\cdots\cdots$$

ب) $\frac{۱}{\cos\theta}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots$$

ج) آیا تساوی زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$$

د) با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید و سپس درستی آن اتحاد را اثبات کنید.

تمرین

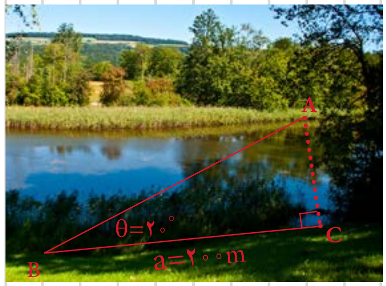
۱ــ با فرض اینکه α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=\frac{-۳}{۵}$ سایر نسبت‌های مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $\tan\alpha = \frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $\theta=۳۵^\circ$ و $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ در این صورت سایر نسبت‌های مثلثاتیِ زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

۴ــ اگر $\theta=۴۰^\circ$ و $\tan\theta = \sqrt{۳}$ در این صورت سایر نسبت‌های مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

۵ــ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند او ابتدا مطابق شکل نقطه‌ای چون C و نقطه‌ای مانند A در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه را مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد و از نقطهٔ B به نقطهٔ A نگاه می‌کند اگر زاویهٔ دید این شخص، اندازه‌گیری شود و ۲۰° باشد و با فرض اینکه $\sin ۲۰^\circ \approx ۰/۳۴$ او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر گرد کنید.)



۶ــ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta} = \frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

ج) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha} = \tan\alpha$

د) $\frac{\tan x + \cot x}{\frac{۱}{\sin x} + \frac{۱}{\cos x}} = ۱$

هـ) $۱ - \frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x} = \sin x$

و) $\frac{۱}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{۱+\sin x}$