فصل دوم : توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول : ریشه و توان عددهای حقیقی

فعالیت

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه نزدیکی با هم دارند :

۱ــ با هر تساوی توانی یک تساوی ریشه‌ای بنویسید؛ همچنین متناظر هر تساوی ریشه‌ای یک تساوی توانی بنویسید. مانند نمونه‌ها :

$\sqrt{۸۱}=۹ \leftrightarrow ۹^۲=۸۱$ $\qquad (-۳)^۳=-۲۷ \to \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

$\sqrt[۳]{۲۷}=۳ \leftrightarrow$ $\qquad ۲^۴=۱۶ \leftrightarrow \sqrt[۴]{۱۶}=۲$

$\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲} \leftrightarrow$ $\qquad ۱۱^۲=۱۲۱ \leftrightarrow$

$\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳ \leftrightarrow$ $\qquad (۰/۲۵)^۲=۰/۰۶۲۵ \leftrightarrow$

$\sqrt{۱۰۰}=۱۰ \leftrightarrow$ $\qquad (۰/۵)^۲=۰/۲۵ \leftrightarrow$

$\sqrt{۱۰۰۰}=۱۰\sqrt{۱۰}$ $\qquad (-۹)^۲=۸۱ \leftrightarrow$

۲ــ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید. برای بعضی می‌توانید عددهای تقریبی بنویسید.

عدد	۸	۲۰	۲۷		۱۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰
ریشه دوم	۲		۳	۵	۳۵	۱۰	

کاردرکلاس

۱ــ حجم مخزن آبی به شکل مکعب برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس زده و حدس خود را آزمایش کنید.

می‌دانیم که هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد حجم آن برابر $a^۳$ متر مکعب است.

احمد : بنابراین طول ریشه سوم ۲۵ یعنی $\sqrt[۳]{۲۵}$ می‌باشد. فکر می‌کنم $\sqrt[۳]{۲۵}=۲/۸$ چون $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ آیا

$(۲/۸)^۳=۲۵$

$(۲/۸)^۳=(۲/۸)^۲(۲/۸)=۲۱/۸۵۲ \simeq ۲۱/۸۵$

به ۲۵ نزدیک است!

محسن : باید $\sqrt[۳]{۲۵}$ را به دست آوریم؛ چون ۲۷>۲۵ پس $۳>\sqrt[۳]{۲۵}$. بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم.

$(۲/۹)^۳=(۲/۹)^۲(۲/۹)$

$=۲۴/۷۸۹$

$\simeq ۲۴/۸$

با تقریب کمتر از ۰/۱ به ۲۵ خیلی نزدیک است پس $۲/۹ \simeq \sqrt[۳]{۲۵}$ می‌گیریم.

دبیر : درست است ریشه سوم ۲۵ تقریبی به دست می‌آید و به‌طور تقریبی آن‌را برابر ۲/۹ می‌گیریم.

$\sqrt[۳]{۲۵} \simeq ۲/۹$

احمد : مقدار دقیق $\sqrt[۳]{۲۵}$ چقدر است؟

دبیر : $\sqrt[۳]{۲۵}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید می‌توانید تا چندین رقم اعشار؛ **مقدار تقریبی آن را به‌دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری کاملاً به‌دست نمی‌آید**. اگر قدرت ماشین حسابتان بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به‌دست می‌دهد.

به همین دلیل است که برای مقدار دقیق ریشه سوم از نماد $\sqrt[۳]{۲۵}$ استفاده می‌کنیم.

$\sqrt[۳]{۲۵}$ به‌جای مقدار دقیق ریشه سوم ۲۵ به‌کار می‌رود اما در عمل با مقدارهای تقریبی آن کار می‌کنیم.

در ریاضیات هرجا بخواهیم با رادیکال‌ها به‌جای مقدارهای دقیق کار می‌کنیم. امّا در عمل مقدار تقریبی ۲/۹ را، که محسن به‌دست آورده بود، برای $\sqrt[۳]{۲۵}$ می‌توانیم درنظر بگیریم.

۲ــ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه و روی محور اعداد، مانند نمونه‌ها، نشان دهید.

$\sqrt{۵} =$	$\sqrt[۳]{۴} =$	$\sqrt[۳]{۳} = ۱/۷$	$\sqrt[۲]{۱} =$	$\sqrt{۲} = ۱/۴۱$
$\sqrt{۱۵} =$	$\sqrt[۳]{-۸} =$	$\sqrt[۳]{۹} =$	$\sqrt{۸} =$	$\sqrt{۷} =$

۳ــ مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

الف) چون $۳۶ > ۳۰ > ۲۵$ پس $۵ = \sqrt{۲۵} < \sqrt{۳۰} < \sqrt{۳۶} = ۶$

ب) $\bigcirc < \sqrt{۷۰} < \bigcirc$ ج) $\bigcirc < \sqrt{۱۰} < ۳$

د) $\bigcirc < \sqrt{۱۷} < \bigcirc$ هـ) $\bigcirc < \sqrt[۳]{۲۰} < \bigcirc$

۴ــ در کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟

الف) $۳ \simeq \sqrt{۱۰}$ با تقریب کمتر از ۱

ب) $۲/۲ = \sqrt{۵}$ با تقریبی کمتر از ۱

ج) $۳ = \sqrt{۵}$ با تقریب کمتر از ۰/۱

د) $۴ = \sqrt[۳]{۱۰۰}$ با تقریب کمتر از ۱

هـ) $-۶ = \sqrt[۳]{-۲۰۰}$ با تقریب کمتر از ۰/۱ $\sqrt{۲}$

۵ــ زیر رادیکال (جای خالی) عددی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند

الف) $۵ < \sqrt{\quad\quad} < ۴$

ب) $۵ < \sqrt{\quad\quad} < ۲$

ج) $۱۰۰ < \sqrt[۳]{\quad\quad} < ۹۰$

۶ــ سه مکعب مانند شکل مقابل به‌صورت تودر تو واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۲۷ می‌باشد. طول ضلع مکعب میانی چه اعدادی می‌تواند بوده باشد.

۷ــ در شکل زیر دو محور اعداد رسم شده است. هر عدد در محور بالا را به مکعب آن عدد در محور پایینی با یک خط نشان

وصل کنید. به عکس هر عدد روی محور پایین را به یک عدد در محور بالا نشانه کنید.

الف) $5 > \sqrt{} > 4$　　　　ب) $5 > \sqrt{} > 2$

ج) $10 > \sqrt[3]{} > 8$　　　　د) $100 > \sqrt[3]{} > 90$

فعالیت

۱ـ مشابه آنچه در باب ریشه‌های دوم و سوم گفتیم می‌توانیم ریشه‌های چهارم وپنجم را معرفی کنیم.

چون $16 = 2^4$ گوییم ۲ یک ریشه چهارم ۱۶ است. مشابهاً $16 = (-2)^4$، پس ۲- نیز یک ریشه چهارم ۱۶ است.

۲

ریشه‌های چهارم ۱۶

۲-

ریشه‌های چهارم یک عدد مثبت عددهایی هستند که وقتی به توان چهار می‌رسند برابر آن عدد شوند.

ریشه‌های چهارم را با نماد $\sqrt[4]{}$ نشان می‌دهند و ۴ را فرجه رادیکال می‌نامند.

ریشه‌های پنجم را چگونه تعریف می‌کنید؟

ریش پنجم هر عدد (مثبت یا منفی) عددی است که وقتی به توان .... می‌رسد برابر آن .... شود.

چون $32 = 2^5$ پس $2 = \sqrt[5]{32}$ همچنین $-32 = (-2)^5$، $-2 = \sqrt[5]{-32}$.

۲ـ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	۳	۳-	۴-	۴			۰/۵	۰/۵-	۰/۱-	
توان چهارم	۸۱		۲۵۶		۶۲۵	۱۰۰۰۰				۲۰۰

دبیر : ریشه چهارم ۲۵۶ چه عددی است؟

محسن : ۲۵۶ دارای دو ریشه چهارم قرینه است که عددهای ۴ و ۴- هستند.

به هر حال $\sqrt[4]{256}$ را برابر کدام عدد بگیریم؟

دبیر : اگر صحبت از ریشه چهارم عدد مثبت موردنظر است حاصل $\sqrt[4]{256}$ فقط برابر ۴ است؛ امّا اگر سخن از ریشه‌ها می‌باشد ۴ و ۴- را باید درنظر گرفت؛ به‌عبارت دیگر $\sqrt[4]{256} = 4$.

۳ـ آیا ۱۶- ریشه چهارم دارد؟ چرا؟

۴ـ تکمیل کنید

هر عدد مثبت دارای .... ریشه چهارم است که .... یکدیگرند. عدد منفی ریشه چهارم ....

کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	۲	۲-	۳		۱/۵-	۴	۱۱-			۵-
توان پنجم				۲۴۳-				۱۰۰۰۰۰-	۲۵۰۰	

۲ــ چه عددهایی ریشه پنجم آنها با خودشان برابر است؟

۳ــ جاهای خالی را در جدول زیر تکمیل کنید.

عدد	۲۴۳	۲۴۳-		۳۲-		۷۱	۱۹	۲۰	۳۰-	۱-	۱۱۰۰۰۰
ریشه پنجم			۴-		۵	$\simeq$	$\simeq$				

تمرین

۱ــ محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{-۰/۰۰۰۳۲} =$

$\sqrt[5]{۰/۰۰۰۳۲۲} =$

$\sqrt[5]{-۳۱۲۵} =$

$\sqrt[5]{\dfrac{۱}{۱۰۰۰۰۰}} =$

۲ــ $a = ۰/۰۰۲۴۳$ و $b = ۰/۰۰۰۳۲$؛ $\sqrt[5]{a}$ و $\sqrt[5]{b}$ را محاسبه کنید.

۳ــ می‌دانیم $۰ < a < b < ۱$. ابتدا حدس بزنید و سپس در ◯ علامت > یا < بگذارید.

$\sqrt[5]{b}$ ◯ $\sqrt[5]{a}$

۴ــ این عددها را روی محور مشخص کنید.

$\sqrt[5]{۱۰۰}$

$\sqrt[5]{-۱۱۰}$

$\sqrt[5]{۲۱}$

$\sqrt[5]{-۲۵۰}$

۵ــ می‌دانیم $۱۱ = \sqrt[5]{۱۶۱۰۵۱}$ ، $\sqrt[5]{۱۷۰۰۰۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۶ــ در جاهای خالی یکی از علامت‌های > ، < و یا = قرار دهید.

$۲^۵$ ◯ $۲^۳$ $(۰/۱)^۵$ ◯ $(۰/۱)^۳$ $(۰/۱)^۵$ ◯ $(۰/۱)^۳$

$۰/۱$ ◯ $\sqrt[5]{۰/۰۰۰۰۱}$ $(-۲)^۵$ ◯ $(-۲)^۴$ $(-۲)^۵$ ◯ $(-۲)^۳$

۷ــ هرگاه $\sqrt[n]{-۱} = -۱$ و n چگونه عددی است $\sqrt[5]{a^5} = a$ برای هر مقدار (مثبت یا منفی) a درست است؟

۹ــ محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{19} \times \sqrt[5]{19^{9}} =$

$\sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{2} =$

درس دوم : ریشه nام

فعالیت

می‌توانید مطابق الگوهایی که برای تعریف ریشه‌های دوم، سوم، چهارم وپنجم عمل کردیم برای سایر ریشه‌ها عمل کنیم. مثلاً برای ریشه ششم. از کجا شروع کنیم؟

احمد : توان ششم را ملاک کار قرار می‌دهیم.

درست است. مثلاً با مثال۶۴= $۲^{۶}$ شروع کنید.

ریشه‌های ششم ۶۴ عددهایی هستند که وقتی به توان شش می‌رسند برابر ۶۴ شوند.

عدد ۲ یکی از آنهاست.

فرهاد : ۲- نیز یک ریشه ششم ۶۴ است ۶۴ = $(-۲)^{۶}$ درست است.

$۲ = \sqrt[6]{۶۴}$

ریشه‌های ششم ۶۴

$-۲ = -\sqrt[6]{۶۴}$

پس۶۴ دو ریشه ششم دارد که قرینه‌اند.

درست است. اما وقتی ریشه چهارم موردنظر است آن را برابر ۲ می‌گیریم، به عبارت دیگر ۲= $\sqrt[4]{۶۴}$

فرهاد : عیناً مانند ریشه‌های دوم و چهارم می‌باشد.

اینک به پرسش‌های زیرپاسخ دهید.

۱ــ آیا ۶۴- هم ریشه ششم دارد؟ توضیح دهید.

۲ــ برای یک عدد طبیعی و دلخواه مانند n (n می‌تواند ۶، ۷۸ و یا هر عدد طبیعی که تصور می‌کنید بوده باشد) ریشه nام را تعریف کنید :

هرگاه n عدد طبیعی باشد، ریشه (ریشه‌های) nام عدد a عدد (عددهایی) مانند b هستند به طوری‌که توان .... b برابر a باشد.

ریشه nام a را به شکل $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و n را فرجه رادیکال می‌نامند.

۳ــ n را یک بار زوج و یک بار فرد بگیرید. مشخص کنید که چرا هر عدد مثبت برای وقتی که n زوج باشد و ریشه nام دارد. آیا این دو ریشه قرینه‌اند؟ و برای وقتی که n فرد باشد، هر عدد (مثبت یا منفی) یک ریشه nام دارد؟

۴ــ چرا وقتی n زوج است، عددهای منفی ریشه nام ندارد؟

کار در کلاس

۱ــ $-\sqrt[۶]{-۲^۶}$ و $\sqrt[۶]{۲^۶}$ و $\sqrt[۶]{-۳^۶}$ و $\sqrt[۶]{۳^۶}$ را به دست آورید؟

۲ــ فرض کنیم n عددی زوج است. توضیح دهید که چرا تساوی $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ درست است (a عددی دلخواه است، مثبت یا منفی!)

۳ــ فرض کنیم n عددی فرد باشد، نشان دهید که $\sqrt[n]{a^n}=a$.

۴ــ آیا تساوی $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ درست است؟ توضیح دهید.

با استفاده از این ثابت کنید برای هر دو عدد مثبت a و b، $\sqrt[k]{ab}=\sqrt[k]{a}\times\sqrt[k]{b}$

۵ــ حساب کنید.

$$\sqrt[۴]{(۱-\frac{۱}{۳})^۴} \qquad \sqrt[۴]{(-\frac{۱}{۵})^۴} \qquad \sqrt[۴]{۳^۴} \qquad \sqrt[۴]{(-۱۶)} \qquad \sqrt[۴]{(۱-۷)^۲}$$

۶ــ

$$\sqrt[۷]{-۱۲۸} \qquad \sqrt[۷]{۰/۰۰۰۰۱۲۸} \qquad \sqrt[۸]{۲۵۶} \qquad \sqrt[۸]{۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۵۶}$$

۷ــ یکی از علامت‌های > ، < و یا = را بین هر زوج از عددها قرار دهید تا عبارت درست به‌دست آید.

$(۰/۲)^۶ \bigcirc (۰/۲)^۵$ $\qquad (-۰/۲)^۶ \bigcirc (-۰/۲)^۴$ $\qquad ۳^۶ \bigcirc ۳^۴$

$\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۶۴} \bigcirc \sqrt[۵]{۰/۰۰۰۳۲}$ $\qquad \sqrt[۶]{۳} \bigcirc \sqrt[۴]{۳}$ $\qquad (\sqrt{۲})^۲ \bigcirc (\sqrt{۲})^۲$

فعالیت

کدام عبارت درست است؟

الف) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $\qquad$ ب) $\sqrt[n]{\sqrt{a}}=\sqrt[۲n]{a}$ $\qquad$ ج) $\sqrt{(\sqrt[n]{a})}=\sqrt{a}$

د) $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ $\qquad$ ه) $\sqrt[۱۱]{۲^{۲۲}}$ $\qquad$ و) $\sqrt[۱۱]{(-۲)^{۲۲}}=۴$

ز) $\sqrt[۶]{۱۰۰۰۰۰۰}<\sqrt[۵]{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ $\qquad$ ح) $۲\simeq\sqrt[۵]{۷۲}$ با کمتر از ۱ واحد تقریب

تمرین

۱ــ ثابت کنید تساوی

$$\sqrt[k]{ab}=\sqrt[k]{a}\times\sqrt[k]{b}$$

برای وقتی که k فرد باشد برای هر دو عدد حقیقی a ،b برقرار است.

۲ــ ثابت کنید برای هر دو عدد طبیعی k، m

$$\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m \qquad (a > ۰)$$

۳ــ ثابت کنید هر گاه n فرد باشد

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[k]{a} / \sqrt[n]{b}$$

۴ــ ثابت کنید عددهای $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۴]{۲^۲}$ ، $\sqrt[۶]{۲^۳}$ با هم برابرند.

۵ــ مثالی از چند رادیکال از یک عدد همانند مثال‌های پرسش ۵ ارائه دهید که همه رادیکال‌ها با هم برابر شوند.

۶ــ با توجه به اینکه هر عدد توان یکم خودش است $(a^۱ = a)$ از پرسش‌های ۵ و ۶ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

درس سوم

توان‌های گویا

فعالیت

پدر احمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در یک آزمایش یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود.

در لحظه شروع ۱ گرم باکتری کشت داده شد. پس در پایان ساعت اول ۲ گرم، پایان ساعت دوم ۴ گرم و درپایان ساعت nام ۲^n گرم وزن این باکتری‌ها شده است.

$$۱ , ۲^۱ , ۲^۲ , ۲^۳ , \ldots\ldots , ۲^n$$

احمد از پدرش پرسید آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟

پدرش گفت : تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر شده است؟

احمد گفت : حدس می‌زنم وزن آنها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{۱}{۲}$ است.

پدرش گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چقدر است؟

احمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت باکتری‌ها b برابر شود، در این‌صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $a \times b = b^۲$ شده باشد. اما می‌دانیم پس از یک ساعت باکتری‌ها دو برابر می‌شوند، پس $b^۲ = ۲$ یعنی $b = \sqrt{۲}$ (زیرا a مثبت است).

نتیجه جالبی است! $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$. مشابهاً برای نماهای دیگر تعریف می‌کنیم : $\sqrt[۴]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۴}}$ ، $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ ؛ همچنین برای اعداد دیگر، $\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}$ ، $\sqrt[۴]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۴}}$ ، $\sqrt[۷]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۷}}$.

کار در کلاس

اکنون با روش مشابه عددهای زیر را با استفاده از نماد رادیکال بنویسید.

$۲^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲}$ | $۳^{\frac{۱}{۴}}=$ | $۳^{\frac{۱}{۲}}=$

$۵^{\frac{۱}{۲}}=$ | $۵^{\frac{۱}{۳}}=$ | $۶^{\frac{۱}{۴}}=$

فعالیت

اجازه : پس می‌توانیم نماهای کسری، با کسرهای صورت ۱ را تعریف کنیم؟

درست است :

فرض می‌کنیم a یک عدد حقیقی مثبت باشد. برای هر عددی طبیعی n توان کسری را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

احمد : اگر صورت کسرها عددی غیر از یک باشد، چه می‌شود؟

پرسش بسیار خوبی است. در ریاضیات، برای هر پرسش معقولی باید الگو و تعریفی ارائه دهیم. در توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل می‌کنیم :

$$۲^{۶}=۲^{۲\times۳}=(۲^{۲})^{۳}$$ (قاعده ضرب نماها)

می‌توانیم از این الگو پیروی کنیم

$$۲^{\frac{۲}{۳}}=۲^{۲\times\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲^{۲}}\,(=\sqrt[۳]{۴})$$

احمد : خیلی جالب است!

$a>۰$ برای هر دو عدد طبیعی n، m توان کسری را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

کار در کلاس

۱ــ تساوی‌های زیر با نماهای کسری را به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$$۳^{\frac{۴}{۵}}=۳^{۴\times\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۳^{۴}}$$

$$۳^{\frac{۵}{۴}}=\sqrt[۴]{۳^{۵}}=\sqrt[۴]{۳^{۴}\times۳}=\sqrt[۴]{۳^{۴}}\times\sqrt[۴]{۳}=۳\sqrt[۴]{۳}$$

$۴^{\frac{۱}{۵}}=$ | $۴^{\frac{۳}{۵}}=$ | $۴^{\frac{۷}{۵}}=$

$۵^{\frac{۳}{۴}}=$ | $۶^{\frac{۷}{۸}}=$ | $۶^{\frac{۳}{۸}}=$

۲ــ رادیکال‌ها را به‌صورت توان‌های کسری بنویسید.

$\sqrt[۷]{۳^{۲}}=۳^{\frac{۲}{۷}}$ | $\sqrt{۲^{۵}}=$ | $\sqrt[۳]{۵^{۴}}=$

$\sqrt[۵]{۱۹}=$ | $\sqrt[۵]{۶۴}=$ | $\sqrt[۳]{-۲۷}=$

۳ــ می‌دانیم توان منفی برابر معکوس توان مثبت است :

$$a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}}$$

اکنون محاسبه کنید :

$$۴^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۴^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۴^{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{۴^{۲}\times ۴}}=\frac{۱}{۴\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۸}$$

$۲۵^{-\frac{۱}{۲}}=$ $\qquad$ $۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $۱۷^{-\frac{۱}{۲}}=$

$۱۰۰^{-\frac{۱}{۲}}=$ $\qquad$ $۱۰۰۰^{-\frac{۱}{۲}}=$ $\qquad$ $۲۵^{-\frac{۳}{۴}}=$

فعالیت

۱ــ می‌دانیم $(\sqrt[k]{a})^{k}=a$ با استفاده از این نشان دهید.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$$

۲ــ مشابه قاعده توان‌های مکرر برای نمای اعداد طبیعی، $a>۰$، m، n طبیعی $(a^{n})^{m}=a^{nm}$ ثابت کنید برای هر دو عدد گویای r ،s و هر عدد $a>۰$، $(a^{r})^{s}=a^{rs}$

راهنمایی $r=\frac{m}{n}$ و $s=\frac{p}{q}$ بگیرید

$$(a^{rs})^{nq}=\left[(a^{r})^{s}\right]^{nq}$$

امّا

$$(a^{r})^{s}=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}=(\sqrt[n]{a^{m}})^{\frac{p}{q}}$$

$$=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^{m}})^{p}}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}$$

$$a^{rs}=a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}=$$

تمرین

۱ــ هر یک از توان‌های کسری را به‌صورت رادیکال بنویسید؟

$۱۶^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $۵^{\frac{۱}{۷}}=$ $\qquad$ $۵^{\frac{۲}{۷}}=$ $\qquad$ $a^{\frac{۳}{۷}}=$

$۳^{\frac{۱}{۴}}=$ $\qquad$ $۴^{\frac{۲}{۳}}=$ $\qquad$ $۳۲^{-\frac{۱}{۵}}=$

$۳۲^{\frac{۲}{۵}}=$ $\qquad$ $۱۷^{-\frac{۱}{۴}}=$ $\qquad$ $۶۴^{\frac{۱}{۶}}=$

۲ــ هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید :

$\sqrt[۳]{a^{۲}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{a^{۴}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{a}=$

$\sqrt[۴]{a^{۳}}=$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^{۲}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۲n]{a^{۴}}=$

$\sqrt[۷]{۳^{۲}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۳۲}=$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۲^{۱۰}}=$

$\sqrt[۳]{۷^{۲}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۶]{a^{۲}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۸]{a^{۴}}=$

در تمرین‌های ۳ تا ۷ و a همواره مثبت است.

۳ــ نشان دهید که تساوی زیر درست است :

$\sqrt{a} \quad \sqrt[kn]{a}$ $\qquad (a > ۰)$

۴ــ می‌دانیم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ (خواص کسرها $k \neq ۰$). ثابت کنید $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}}$. $(a > ۰)$

۵ــ نشان دهید برای هر دو عدد گویای r، s $(r، s > ۰)$

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a \neq ۰)$

۶ــ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} = \qquad \sqrt[۳]{\sqrt{۵}} =$

مسئله حل کنیم

۱ــ فرض کنیم $۰ < a < ۱$. نشان دهید $a^۲ > a$. آیا برای هر عدد طبیعی n، $a^n < a^{n-۱}$.

۲ــ هرگاه $a > ۱$، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n،

$۰ < a^{n-۱} < a^n$

۳ــ ریشه‌های دوم (جذر) و سوم ۰/۰۶۲۵ را حساب کنید. کدام بزرگ‌تر است؟

۴ــ هرگاه $۰ < a < ۱$ و $n \geq ۳$، ثابت کنید

$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n-۱]{a}$

۵ــ $(a > ۰)$ ثابت کنید برای هر عدد گویای r (مثبت یا منفی) a^r همواره عددی مثبت است.

درس چهارم

عبارت‌های جبری

فعالیت

شما در سال گذشته برخی از اتحادهای جبری مهم را فرا گرفته‌اید. از جمله اتحاد اول (مربع مجموع دو عدد)

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \qquad (*)$$

چرا به این تساوی «اتحاد» می‌گوییم؟

$$(۱+\sqrt{۳})^۲ = ۱^۲ + ۲ \times ۱ \times \sqrt{۳} + (\sqrt{۳})^۲$$
$$= ۱ + ۲\sqrt{۳} + ۳$$
$$= ۴ + ۲\sqrt{۳}$$

چرا به تساوی بالا اتحاد نمی‌گوییم؟

احمد : تساوی بالا یک نمونه از اتحاد اول است.

درست است؛ اما به‌هر حال واژه «اتحاد» به چه معنی است؟

فرهاد : اتحاد یک تساوی است که برای همه مقادیر a ،b برقرار باشد. در حالی که تساوی $2x+1=0$ فقط برای یک مقدار خاص، $x=-\frac{1}{2}$، برقرار است که این تساوی را معادله می‌نامیم و عدد $x=-\frac{1}{2}$ را ریشه با جواب معادله نامیده‌ایم.

درست است شما به جواب خیلی نزدیک شده‌اید. آیا (x) را می‌توانید بدون استفاده از حروف لاتین معنی و بیان کنید؟

فرهاد :

مربع مجموع هر دو عدد برابر است با مربع عدد اول به‌علاوه دو برابر حاصل‌ضرب آن دو عدد به‌علاوه مربع عدد دوم

بسیار خوب : ما در ریاضیات برای آنکه عبارت‌های زبانی (کلامی) را مختصرتر و دقیق‌تر بیان کنیم از حروف استفاده می‌کنیم.

اکنون شما حاصل $(a+b)^2$ را بنویسید.

فرهاد : چون (*) برای هر دو عدد a و b برقرار است، می‌توانیم به جای b ،b− قرار دهیم (در سرتاسر اتحاد) :

$$(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

و یا

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (**)$$

گاهی هر دو اتحاد (*) و (**) را با هم می‌نویسیم :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

اکنون شما حاصل $(a+b)^3$ را پیدا کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots (a+b) = \dots\dots\dots\dots\dots$$

با جمع جملات متشابه، ساده‌تر می‌شود.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (1)$$

و این اتحاد به نام اتحاد مکعب مجموع معروف است. باز چون اتحاد است، b را در سرتاسر، به b− تبدیل کنید و اتحاد دیگری به‌دست آورید؛

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) +$$

و یا، اگر درست عمل کرده باشید، به‌دست می آوریم

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (2)$$

ــ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل یعنی اتحاد (**) به‌دست آورید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$$

$=$

$=$

کار در کلاس

اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه را بنویسیم، مانند

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \qquad (3)$$

گوییم عبارت سمت چپ را به حاصلضرب تجزیه کرده‌ایم. «تجزیه» یعنی به‌صورت «ضرب» نوشته‌ایم، زیرا

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$

در واقع عبارت سمت چپ (۳) به‌صورت حاصلضرب سه عبارت تجزیه شده است.

مانند آنکه در برخی محاسبات عددی ناچاریم یک عدد را به‌حاصل‌ضرب چند عدد تجزیه کنیم، در جبر عبارت‌های جبری نیز در مواردی لازم است که عبارت را به عبارت‌های کوچک‌تر (با درجه کمتر) تجزیه کنیم.

۱ــ اکنون شما عبارت $a^3 + b^3$ را به حاصل‌ضرب تجزیه کنید : از اتحاد مکعب مجموع استفاده کنید :

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$
$$= (a+b)^2(a+b) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=$$

۲ــ در اتحاد

(۴) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

b را با b− جایگزین کنید و اتحاد دیگری به‌دست آورید!

(۵) $a + (-b)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

۳ــ دو اتحاد (۴) و (۵) را با هم بنویسید.

$a^3 + b^3 = (a \pm b)\ (\qquad\qquad)$

فعالیت

۱ــ عبارت‌های جبری $x^3 + 1$ و $x^3 - 1$ را تجزیه کنید.

$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 =$

۲ــ کدامیک از تساوی‌ها درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

ب) $(a+b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}) = a^n + b^n$

ج) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

د) $(a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

هـ) $(a^2+b^2)(a^2+b^2) = a^4 + b^4$

۳ــ وقتی عبارتی برابر حاصل ضرب دو عبارت جبری دیگر است، برای مثال

$a^2 - b^2 = (a-b)(a-b)$

گوییم $a^2 - b^2$ یک مضرب a−b است. همچنین $a^2 - b^2$ یک مضرب a+b نیز می‌باشد. مانند تجزیه در اعداد، هر یک از عامل‌های a−b و a+b را یک **مقسوم‌علیه** $a^2 - b^2$ می‌نامیم. لذا $a^2 - b^2$ **مضرب مشترک** a−b و a+b است.

ــ اکنون شما دو مضرب دیگر برای a−b نام ببرید.

ــ سه مضرب دیگر برای a+b نام ببرید.

ــ آیا a−b و a+b مضرب مشترک دیگری دارند؟ نام ببرید.

ــ یک مضرب مشترک a+b و $a^3 + b^3$ برابر کدام است؟

الف) a+b　　ب) $a^2 + b^2$　　ج) $a^3 + b^3$　　د) $a^3 - b^3$

ـ کدامیک از عبارت‌ها مضرب مشترک $a - b$ و $a^۳ - b^۳$ نمی‌باشد؟

الف) $a^۳ + b^۳$ ب) $(a-b)(a^۳ - b^۳)$ ج) $a^۳ - b^۳$ د) $(a^۳ - b^۳)$

مانند حساب اعداد، برای جبر عبارت‌ها تعریف زیر را بیان می‌کنیم :

هر دو عبارت جبری دارای مضرب مشترک‌های زیادی هستند، امّا مضرب مشترکی که کوچک‌ترین درجه حروف را داراست به نام **کوچک‌ترین مضرب مشترک** آن دو عبارت نامیده می‌شود.

برای مثال، $a^۲ - b^۲$ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $a-b$ و $a+b$ است. امّا $(a-b)(a^۳ - b^۳)$ گرچه مضرب مشترک $a-b$ و $a^۳ - b^۳$ است، امّا کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عبارت نمی‌باشد.

فرهاد : اجازه؟ می‌توانیم بگوییم هر مضرب مشترک بر هر یک از عبارت‌های مربوطه قابل قسمت است؟

دبیر : درست است. $a^۳ - b^۳$ هم بر $a-b$ قابل قسمت است و هم بر $a^۳ - b^۳$.

زیرا $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$

و هر عبارت بر خودش قابل قسمت است.

احمد : چطور یک عبارت جبری بر عبارت جبری دیگر تقسیم می‌شود.

دبیر : دو عبارت را از بزرگ‌ترین درجه از چپ به راست مرتب می‌کنیم. سپس عبارت با درجه بزرگ‌تر را بر عبارت با درجه کوچک‌تر مانند تقسیم اعداد، تقسیم می‌کنیم. به تقسیم فکر کنید و جزئیات را یادداشت کنید.

$۲x^۳$ بر x تقسیم می‌شود.

$$۲x^۳ = ۲x^۲ \times x$$

علامت‌ها قرینه می‌شود :

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ - ۴x^۲ + ۱ & x + ۱ \\ \cline{2-2} & ۲x^۲ - ۶x + ۶ \\ \underline{-۲x^۳ \pm ۲x^۲} & \\ ۰ - ۶x^۲ + ۱ & \\ \underline{\pm ۶x^۲ \pm ۶x} & \\ ۶x + ۱ & \\ \underline{-۶x \pm ۶} & \\ -۵ & \end{array}$$

در نتیجه (x) $۲x^۳ - ۴x^۲ + ۱ = (x+۱)(۲x^۲ - ۶x + ۶) - ۵$ اگر سمت راست را ضرب کنید باید سمت چپ به‌دست آید.

ـ پس خارج قسمت $۲x^۲ - ۶x + ۶$ و باقیمانده -۵ می‌باشد. اکنون این تقسیم‌ها را انجام دهید.

$$\begin{array}{r|l} x^۳ - ۴x + ۳ & x - ۱ \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۵ + x & x - ۱ \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

در هر مورد **عبارت تقسیم** را مانند (x) نوشته و تقسیم را آزمون کنید.

ـ جمع و تفریق عبارت‌های جبری کسری همانند جمع و تفریق عبارت‌های عددی با استفاده از مضرب مشترک برای مخرج‌ها

انجام می‌شود.

به عنوان مثال حاصل عبارت جبری زیر را پیدا می کنیم.

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x^{۳}+۱}-\frac{۱}{x^{۳}-۱}$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک $x^{۳}-۱$ و $x-۱$ برابر $x^{۳}-۱$ است. همچنین کوچک‌ترین مضرب مشترک $x^{۳}+۱$ و $x+۱$ برابر $x^{۳}+۱$ است. پس کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج مشترک را برابر $(x^{۳}+۱)(x^{۳}-۱)$ می گیریم :

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x^{۳}+۱}-\frac{۱}{x^{۳}-۱}=\frac{A}{(x^{۳}+۱)(x^{۳}-۱)}$$

مخرج کسر جدید را به‌ترتیب به مخرج هر یک از کسرهای سمت راست تقسیم کرده و خارج قسمت را در صورت آن کسر ضرب می کنیم؛ علامت جلو کسرها فراموش نشود :

$$(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)=(x-۱)\underbrace{(x^{۲}+x+۱)(x^{۳}+۱)}_{\text{اولین خارج قسمت}}$$

$$(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)=(x+۱)\underbrace{(x^{۲}-x+۱)(x^{۳}+۱)}_{\text{دومین خارج قسمت}}$$

$$(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)=(x^{۳}+۱)\underbrace{(x^{۳}-۱)}_{\text{سومین خارج قسمت}}$$

$$(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)=(x^{۳}-۱)\underbrace{(x^{۳}+۱)}_{\text{چهارمین خارج قسمت}}$$

$$A=(x^{۲}+x+۱)(x^{۳}+۱)-(x^{۲}-x+۱)(x^{۳}-۱)+x^{۳}-۱-(x^{۳}+۱)$$

$$=۲x^{۲}+۲x^{۴}=۲(x^{۴}+x^{۲})$$

$$\text{حاصل}=\frac{۲(x^{۴}+x^{۲})}{(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)}$$

اکنون شما هر یک از عبارت‌ها را حل کرده و حاصل را حتی‌المقدور ساده کنید :

الف) $\frac{۱}{x^{۲}+x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$

ب) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

ج) $\frac{۱}{x^{۲}-y^{۲}}+\frac{۲}{x+y}+\frac{۳}{۵}$

د) $\frac{۱}{x^{۴}-y^{۴}}+\frac{۲}{x^{۲}-y^{۲}}+\frac{۳}{x+y}$

کار در کلاس

۱ــ عبارت x^4+y^4 پس از تجزیه با کدام عبارت برابر است؟

الف) $(x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy)(x^2-y^2+\sqrt{2}\,xy)$

ب) $(x^2+y^2-\sqrt{2}\,xy)(x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy)$

ج) $(x+y)(x^3-x^2y+xy^2+y^3)$

د) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$

۲ــ $x+y$ مقسوم‌علیه کدام یک از زوج عبارت‌ها است؟

الف) $(x+y)^2\,,\,x^2-y^2$ ب) $x^2+y^2\,,\,x^2-y^2$

ج) $(x-y)^2\,,\,x^2-y^2$ د) $x^2+y^2\,,\,2(x+y)$

۳ــ یک مقسوم علیه مشترک دو عبارت $3(x^3-y^3)$ و $18(x^6-y^6)$ را پیدا کنید.

۴ــ در صورت امکان هر کسر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}$ ب) $\dfrac{(a+b)^3}{a^3-b^3}$ ج) $\dfrac{(a+b)^3}{a^3+b^3}$

د) $= \dfrac{a^5-b^5}{a-b}$ هـ) $\dfrac{a^4+b^4}{a+b}$ و) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$

۵ــ با مخرج مشترک‌گیری کسرها را جمع و تفریق کنید.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4} \qquad \frac{1}{x^4-1}+\frac{5}{x^2+1}-\frac{6}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}$$

۶ــ تجزیه کنید

الف) $x^{16}-16$ ب) x^3+27 د) x^5-2

(راهنمایی : $(\sqrt{2})^5 = 2$)

تمرین

۱ــ عبارت‌ها را تا حد امکان تجزیه کنید.

الف) x^8-3 ب) x^8-1

ج) $(x^2+(a+b)x+ab)(x-a)(x-b)$

۲ــ عبارت‌های عددی را طوری ساده کنید که رادیکال در مخرج نداشته باشند. (گویا کردن کسرهای گنگ)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

۳ــ می‌دانیم $2=2(\sqrt{2})$. حال اگر با استفاده از یک ماشین حساب ساده $\sqrt{2} = 2$ می‌گیریم. به جای $\sqrt{2}$ در تساوی بالا قرار دهید.

ــ چرا برابر ۲ نمی‌شود؟ چه مقدار برای $\sqrt{۲}$ اختیار کنیم تا توان دوم آن برابر ۲ شود؟

فرهنگ نوشتن

○ سه عدد ۳، ۴ و ۵ را یک سه تایی فیثاغورثی می‌نامیم، زیرا

$$۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$$