

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌های داده شده پاسخ دهید.

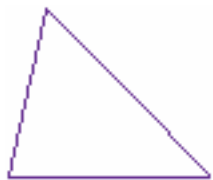
- ۱- امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام تیم مورد علاقه من باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است درست (معتبر) است؟ چرا؟
- ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.
- ۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام معتبرتر و قابل اطمینان‌تر هستند.

«استدلال» دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته‌های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

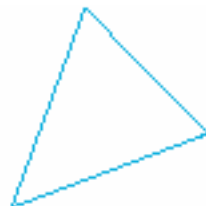
همان‌گونه که در موارد بالا مشاهده کردید حتی در بسیاری کارهای روزمره نیز نیاز به استدلال کردن پیدا می‌کنیم. برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

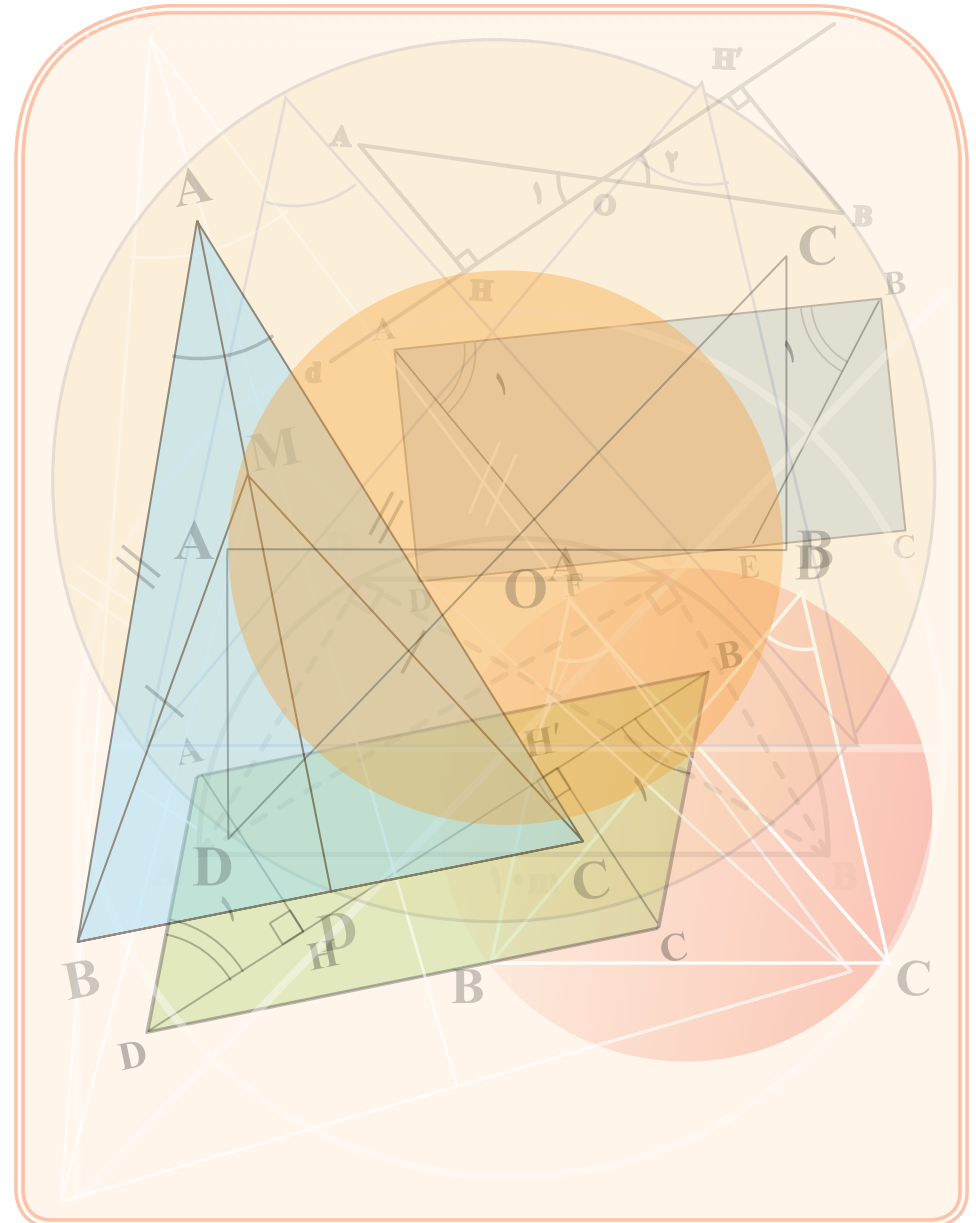
- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به آنچه قبلاً اتفاق افتاده نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نمی‌باشد.
- ۲- دو تا از ارتفاع‌های هر یک از مثلث‌ها را رسم کنید.



۳۵



استدلال و اثبات در هندسه



۳۴

کار در کلاس

۱- مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کنند. در این مورد در کلاس با یکدیگر بحث کنید.

تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید.



آیا می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد هر دو عمودمنصف یک مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید ادعای خود را اثبات کنید؟

آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث می‌باشد؟ یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است. استدلالی که او استفاده کرده است مشابه استدلال کدام یک از دو قسمت فعالیت قبل است؟

فعالیت

۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته‌اند، بزرگ‌ترند؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید.

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر اندازه آنها را با هم مقایسه کنید.

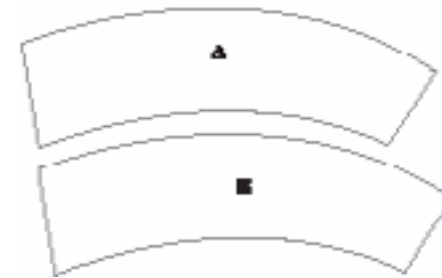


۲- قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از یک

شیرینی موردعلاقه شما هستند. کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟)

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه

کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟



۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع

کافی است؟ چرا؟

هرچند معمولاً در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها و ترسیم آنها و استفاده از شهود کمک زیادی به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست می‌کند اما باید توجه داشته باشیم که هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً درست بوده است.

فعالیت

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا بیان مثال‌های متعدد و همچنین اندازه گرفتن برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات داده شده مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید.
مهر داد: آیا زاویه‌های روبه‌رو به هم، در هر لوزی با هم برابرند؟
سعید: بله، چون ما از قبل می‌دانستیم که در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی هستند. لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

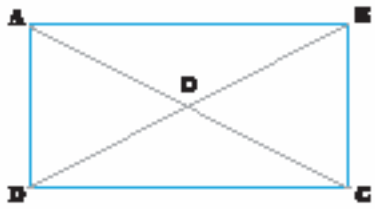
در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را به شکل زیر کامل کنید.

فرض	شکل لوزی است
حکم	زاویه‌های روبه‌رو برابرند

استدلال:

در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند \Rightarrow لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است } در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابرند

۲- اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله انجام می‌دهیم، تشخیص فرض و حکم و حقایق مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، حکم و حقایق از قبل ثابت



شده یا دانسته را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید.

فرض	ABCD مستطیل است
حکم	قطرهای مستطیل، مساوی هستند

فرض : $\begin{cases} \hat{A} = \dots = \dots = \dots = 90^\circ \\ AB = \dots & AD = \dots \\ AB \parallel \dots & AD \parallel \dots \end{cases}$
 حکم : AC =

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید.
 الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده‌اند. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابرند.

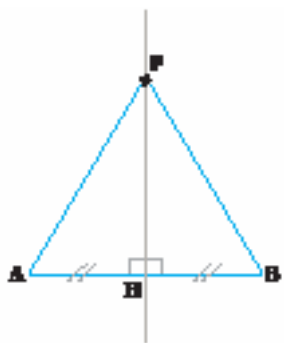


حکم : _____ = _____
 فرض : _____ = _____

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.
 ج) اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابرند.

فعالیت

۱- در مسئله زیر توضیح دهید چرا استدلال نوشته شده درست نیست.



پاره خط به یک فاصله است. برای این کار یک نقطه دلخواه مانند P در شکل مقابل، روی عمود منصف پاره خط در نظر گرفتیم و به دو سر پاره خط وصل کردیم و چون دو مثلث $\triangle AHP$ و $\triangle BHP$ به حالت (ض ض) همنهشت هستند نتیجه گرفتیم پاره خط های PA و PB با هم برابرند.

لذا فاصله نقطه P که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است کافی است؟

کار در کلاس

به استدلال هایی که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند دقت کنید.

مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است.

استدلال حامد: یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم. چون سه زاویه دارد و هر

زاویه 60° است پس مجموع زاویه های مثلث 180° است.

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت های گوناگون کشید و زوایای آنها را

اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع

زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

استدلال مهدی: مهدی گفت با این مسئله در سال گذشته آشنا شدیم و شکلی شبیه آنچه در

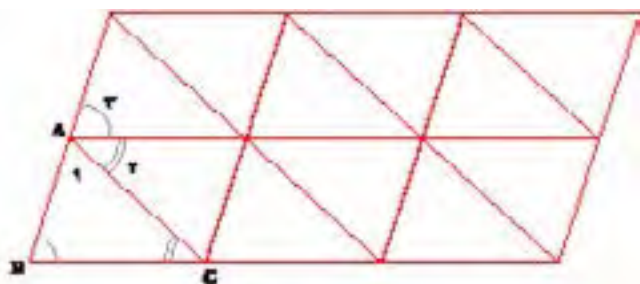
کتاب سال قبل آمده بود کشید

و با مشخص کردن زاویه های

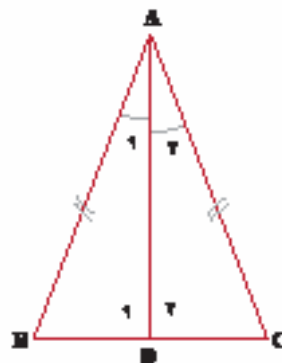
مثلث ABC به صورت مقابل،

استدلالی با استفاده از شکل

به صورت زیر آورد.



$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$



فرض	حکم
AD نیمساز زاویه A از مثلث متساوی الساقین ABC است	BD=DC

استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است پس مثلث های

ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم برابرند.

پس اجزای متناظر آنها برابرند. در نتیجه: BD=DC

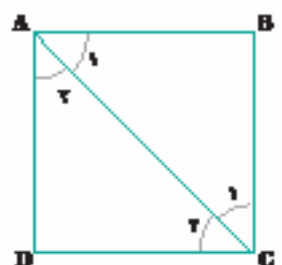
با انجام یک تغییر در روند استدلال آن را درست و معتبر کنید.

۲- همان طور که در فعالیت ۱ اثبات کردید در یک مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده

میانه هم هست. فردی ادعا کرده است. که با استدلالی مشابه و با رسم نیمساز های دیگر می توان ثابت

کرد که همین خاصیت برای سایر نیمساز ها هم برقرار است. (این خاصیت را به سایر نیمساز ها تعمیم

داد) یعنی در مثلث متساوی الساقین هر نیمساز، میانه هم هست. آیا این ادعا درست است؟ چرا؟



۳- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که قطر

AC از مربع ABCD نیمساز زاویه های \hat{A} و \hat{C} است. چون دو

مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ به حالت سه ضلع با هم همنهشت هستند لذا

زوایای متناظر با هم برابرند. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا

AC نیمساز است.

آیا می توان این استدلال را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز

زاویه های دو سر آن قطر می باشد؟

۴- به نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمساز های دیگر نبود اما در

فعالیت ۳ خاصیت مورد نظر به نیمساز دیگر تعمیم داده می شود؟

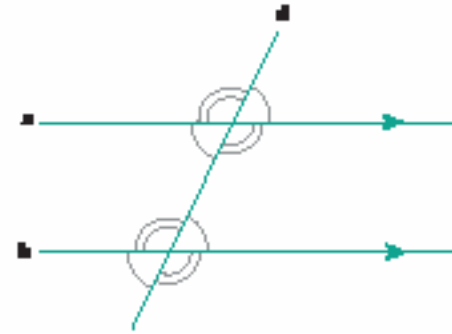
وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم اگر تمام ویژگی هایی

که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر اعضای آن مجموعه نیز وجود داشته باشد

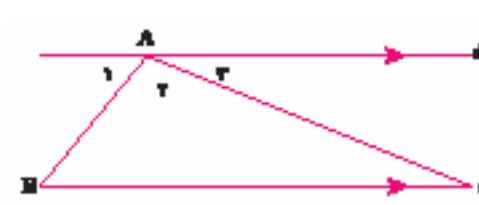
می توان درستی نتیجه به دست آمده را به همه اعضای آن مجموعه تعمیم داد.

۵- در سال گذشته ثابت شد که هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن

استدلال رضا : رضا گفت از سال گذشته می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساویند.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم. مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. حال طبق مطلب بالا برخی زوایای موجود در



شکل با هم برابر خواهند بود. برای آنکه بتوانم زوایای برابر را نشان دهم سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با شماره های ۱ و ۲ و ۳ نشان داده ام که همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری $\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ خواهیم داشت :

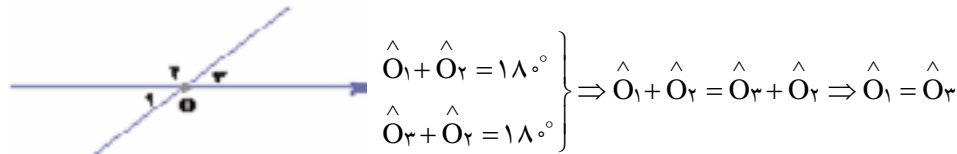
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

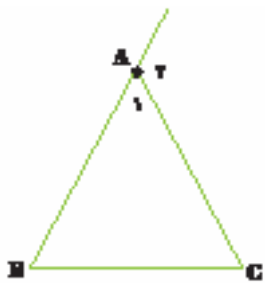
از بین استدلال های این چهار دانش آموز، به نظر شما استدلال کدام یک معتبرتر است؟

به نظر شما پول عطا بیشتر است یا پول عنایت؟ دلیل خود را توضیح دهید.
بین استدلالی که برای مسئله بالا و مسئله بعدی هست چه شباهتی می بینید؟
مسئله : زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.
فرض کنیم O_1 و O_2 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند. داریم :



اگر بخواهید هر کدام از اندازه زاویه های \hat{O}_1 و \hat{O}_2 و \hat{O}_3 را به یکی از پول های عطا و عنایت و هدایت متناظر کنید، چگونه این کار را انجام می دهید؟

تمرین



۱- آیا اثبات ارائه شده برای مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسئله : در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی برابر است با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن.
اثبات : مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم. می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای \hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° هستند. بنابراین

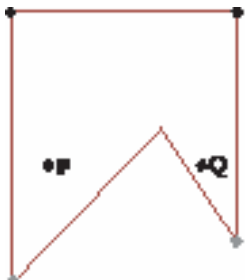
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

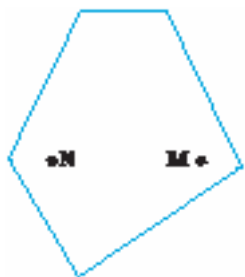
۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شده اید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت آورد. «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، تماماً درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» و چند ضلعی که محدب نباشد مقعر است. آیا تشخیص های داده شده توسط دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست می باشند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

فعالیت

مسئله : عطا و عنایت و هدایت هر کدام مقداری پول همراه داشتند. عطا همه پول های خود را به هدایت داد. پول هردوی آنها روی هم 5000 تومان شد. سپس عطا تمام پولش را از هدایت پس گرفت. این بار عنایت تمام پول هایش را به هدایت داد. پول هردوی آنها نیز روی هم 5000 تومان شد.



غفور: چند ضلعی مقابل محدب نیست زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارند اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند تماماً در چهارضلعی قرار نمی‌گیرد.



مهدی: چند ضلعی مقابل محدب است زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارند و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز تماماً در چهارضلعی قرار دارد.

۳- در هر مورد نشان دهید آیا نتیجه‌ای که از مفروضات مشخص شده گرفته شده است معتبر است. پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD مستطیل است.}$

(ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ضلع‌های ABCD با هم برابر نیستند.}$

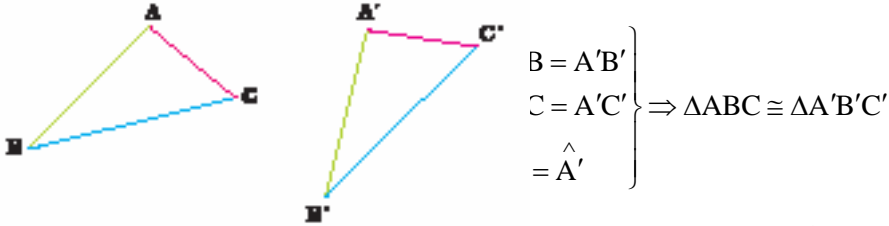
(ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD مربع نیست.}$

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه به خط عمود می‌شود.

راهنمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم کنید و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابرند و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

یادآوری

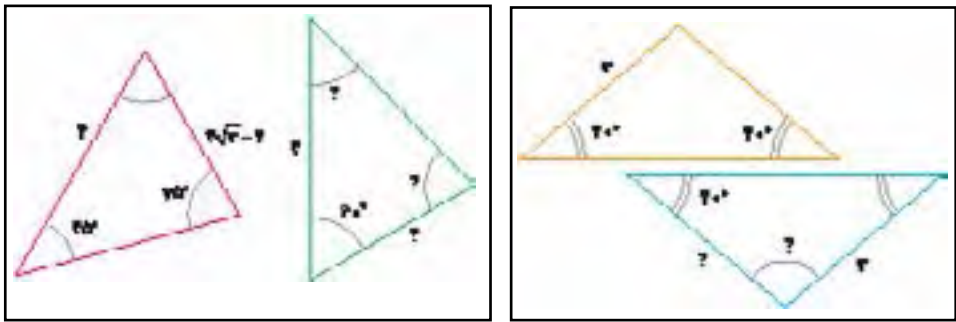
با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را، این گونه نمایش می‌دهیم:



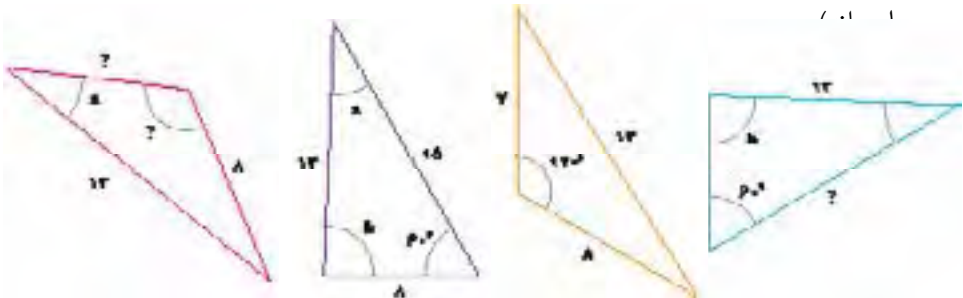
برای یادآوری بیشتر دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، جفت مثلث‌های ترسیم شده در یک کادر، با یکدیگر همنهشتند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

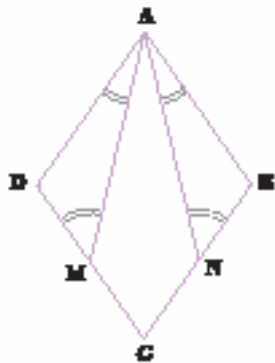


۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده‌اند که دو به دو با یکدیگر همنهشتند. اندازه‌های مجهول را روی آنها تعیین نمایید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده‌اند، با



- ۱- چرا زاویه‌های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائمه‌اند؟ طول‌های AC و BD را به کمک قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$
- ۲- به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ACB و ADB همین نتیجه را ثابت کنید.

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند.

- ۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$AD=AB= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \hat{A} + \hat{B} = \dots\dots\dots$$

$$\hat{A} = \dots\dots\dots, \hat{B} = \dots\dots\dots \hat{C} + \hat{B} = \dots\dots\dots$$

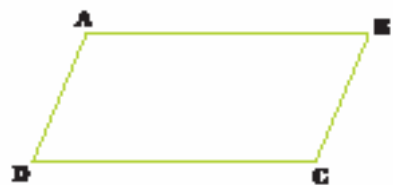
آیا می‌توانید تساوی‌های دیگری هم بنویسید؟

- ۲- با کامل کردن تساوی‌های زیر نشان دهید: $BN=DM$

$$DC=BC \Rightarrow \frac{1}{4} DC = \dots\dots \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots$$

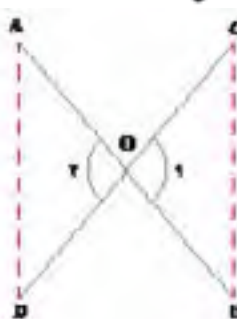
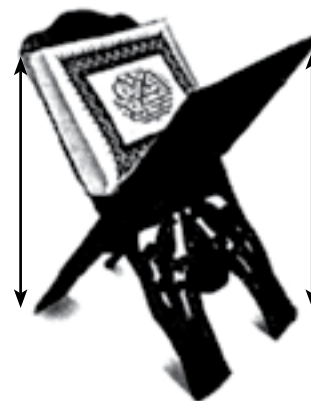
- ۳- با توجه به نتیجه قسمت دوم و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN هم‌نهشتند. از آنجا چگونه می‌توانید تساوی پاره‌خط‌های AM و AN را نتیجه بگیرید؟ زاویه‌های برابر در دو مثلث ADM و ABN را نیز مشخص کنید.

کار در کلاس



می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید. حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله نظرات چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤالات پاسخ دهید.

مثال: با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه چوبی آن از وسط هم گذشته‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن، در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که: $OA=OB$ و $OC=OD$ و حکم این است که: $AD=BC$. روشن است که زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟) پس مثلث‌های OAD و OBC هم‌نهشتند و از آنجا درستی حکم به دست می‌آید:

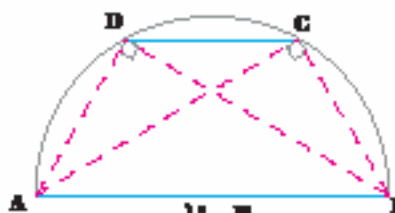


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (مقابل به رأس)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \Rightarrow \Delta OBC \cong \Delta OAD \Rightarrow AD = BC \end{array}$$

فعالیت



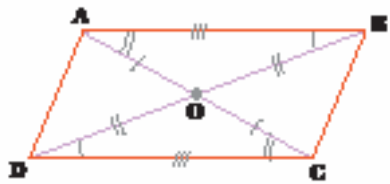
در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از روی پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ده متر است و اکنون ترانه روی پله C



که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد نشسته است ($BC=6$) و شهرزاد روی پله D که از ابتدای پل همین قدر فاصله دارد، نشسته است و آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل نیز برابر باشد، یعنی $AC=BD$.

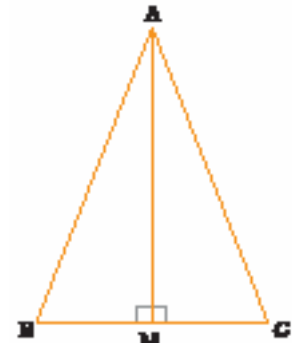
۳- نتیجه قسمت دوم را بدون استفاده از همنهشتی مثلث‌ها، و با امتداد دادن اضلاع متوازی الاضلاع، به کمک خطوط موازی و مورب به‌طور مستقیم ثابت کنید.

تمرین



۱- به کمک نتایج به‌دست آمده در مورد اضلاع روبه‌رو در متوازی الاضلاع، ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA=OC$ و $OB=OD$.

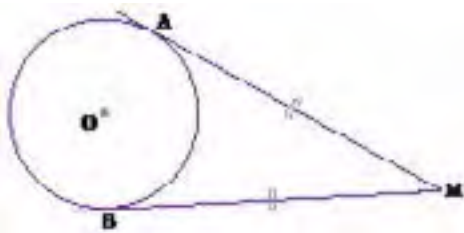
۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است!)



۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟

چرا AM نیمساز زاویه \hat{A} است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

۴- سجاده به تجربه دیده که هر بار که از بیرون دایره‌ای، دو مماس بر آن رسم کرده، مماس‌ها به ظاهر با هم برابرند. اما دلیل درستی این موضوع را نمی‌داند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به سه نقطه A

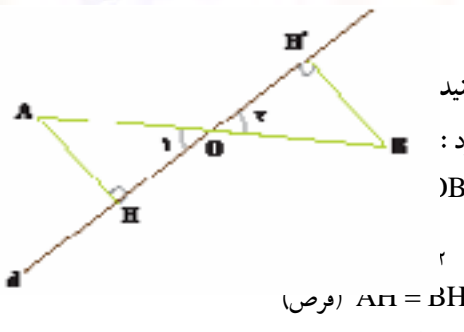


و B در شکل، و با توجه به ویژگی شعاع و مماس که در سال گذشته دیدید و اثبات همنهشتی دو مثلث مناسب به او کمک کنید تا علت درستی این حکم را بداند.

۵- فرهاد در امتحان هندسه، به سؤال زیر رسید:

در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB

گذشته و A و B از d به یک فاصله اند ($AH=BH'$) ثابت کنید $OH=OH'$. او استدلال زیر را برای اثبات حکم ارائه کرد:



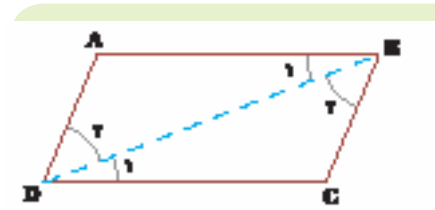
$$\left. \begin{array}{l} \text{B) } \\ \text{C) } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \text{(ض ض ض)} \end{array} \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH = OH'$$

آیا استدلال فرهاد را می‌پذیرید؟ در غیر این صورت آن را طوری اصلاح کنید که درست شود.

آفرین: در تعریف متوازی الاضلاع برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند! با چشم هم می‌توان دید!

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟
- به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید، آیا برابری اضلاع مقابل، در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیابیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

در این دو مثلث، ضلع‌های روبه‌روی AD و BC، روبه‌رو به کدام زاویه‌ها هستند؟ چرا این دو زاویه برابرند؟

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

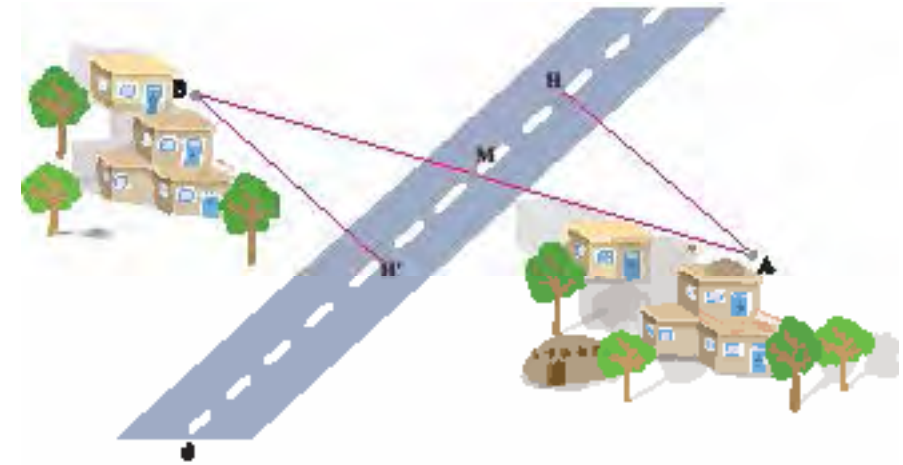
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } \dots \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \dots \text{ مورب } \dots \text{ و } \dots \\ BD = \dots \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \dots \cong \Delta \dots \text{ (ض ز ض)}$$

$$\Rightarrow AD = BC, AB = CD$$

- چرا برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانستیم روی حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) حساب کنیم؟
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم، همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟
- از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی الاضلاع، به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم در مورد زاویه‌های متوازی الاضلاع به‌دست می‌آید. این نتیجه را بنویسید:
- در هر متوازی الاضلاع روبه‌رو، مساوی‌اند.

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد، اما مراحل را می‌توان مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B از سال‌ها قبل با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل بوده‌اند. چند سال قبل در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد و راه ارتباط دو روستا به جادهٔ آسفالتی از طریق همان جاده خاکی انجام می‌شود. اکنون برای کوتاه کردن این راه، ادارهٔ راهسازی تصمیم گرفته که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن، تا جادهٔ اصلی ایجاد کند. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول ۴ کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ایجاد جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است. یعنی در شکل مقابل خط d جادهٔ اصلی است که از M وسط AB عبور کرده و AH و فاصلهٔ روستای A تا جاده (۴km) و BH' فاصلهٔ روستای B تا جادهٔ اصلی است و می‌خواهیم نشان دهیم که $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در این جا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم نمایید.

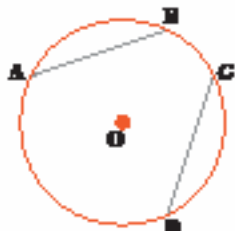
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را شناخته و در یک جدول بنویسید. در این جا مفروضات اصلی این است که M وسط AB است، یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمودند و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب‌اند؟ با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{\dots} = \hat{\dots} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویهٔ حاده)} \\ \Rightarrow \Delta \dots \cong \Delta \dots \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت

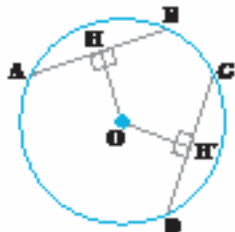


در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.

۱- نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی‌اند.

۲- از سال گذشته می‌دانید که خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

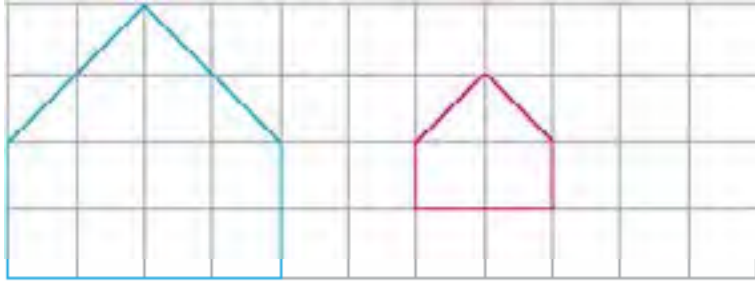
کار در کلاس



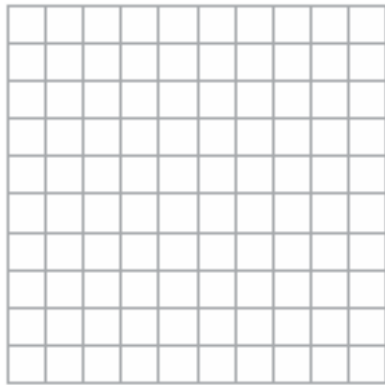
در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH=OH'$) مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

فعالیت

۱- مربع های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی متر هستند.



اندازه ضلع ها و زاویه های هر دو شکل را بنویسید.
 چه رابطه ای بین ضلع های دو شکل وجود دارد؟
 چه رابطه ای بین زاویه های دو شکل وجود دارد؟
 اندازه ضلع های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع های شکل (۲) است؟
 در صفحه شطرنجی مقابل یک شکل رسم کنید و یک شکل مثل آن بکشید که اندازه ضلع هایش ۲ برابر شکل اول باشد.



۲- در تصویر زیر نقشه قسمتی از شهر تهران را می بینید مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است. یعنی هر یک سانتی متر روی نقشه برابر با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی متر مقدار واقعی است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



- در تصویرهای زیر دو گل شبیه به هم را می بینید. آیا هر گل به طور کامل مثل هم هستند؟



- در تصویرهای زیر دو عکس از یک شخص را می بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟



- تصویرهای زیر عکس هایی از میدان آزادی تهران می باشند. کدام یک مشابه میدان آزادی است و کدام یک نیست؟



۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



هرگاه در دو شکل همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل متشابه می‌گوییم.

کار در کلاس

۱- آیا دو مربع زیر متشابه هستند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

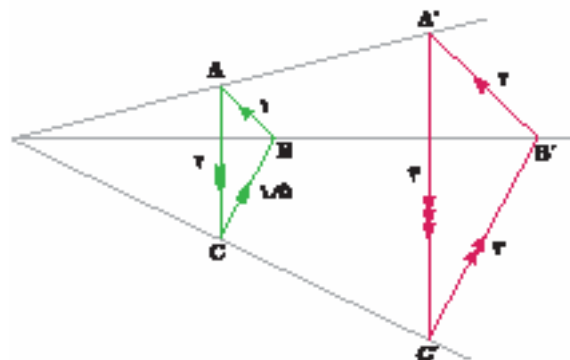
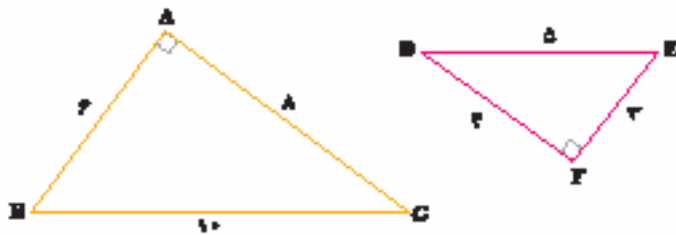


۲- کدام یک از مستطیل‌های زیر با هم متشابهند؟ چرا؟ آیا می‌توان گفت هر دو شکل با هم متشابه هستند؟



فعالیت

۱- دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم رنگ کنید. نسبت کل ضلع‌های متناظر را حساب کنید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟



۲- در شکل مقابل دو مثلث با هم متشابهند. توضیح دهید چگونه به کمک خطوط موازی شکل‌های متشابه درست شده‌اند. نسبت طول ضلع‌های دو شکل را پیدا کنید.

تمرین

۱- در تصویرهای کاشی کاری زیر شکل های متشابه را مشخص کنید.



۲- آیا هر دو شکل هم نهشت با هم، متشابه نیز هستند؟

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟

۴- در یک نقشه مقیاس $1:200$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $3/5$ سانتی متر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه

هستند. مقدار x را پیدا کنید.

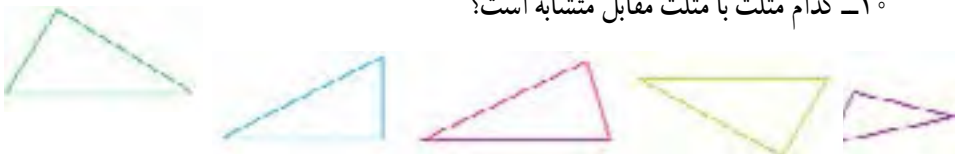
۹- دو تصویر زیر با هم متشابه هستند. به نقاط مشخص شده در دو شکل توجه کنید. طول

پاره خط ها و زاویه داده شده را با دقت اندازه گیری کنید. آیا دو شرط متشابه بودن شکل ها رعایت شده

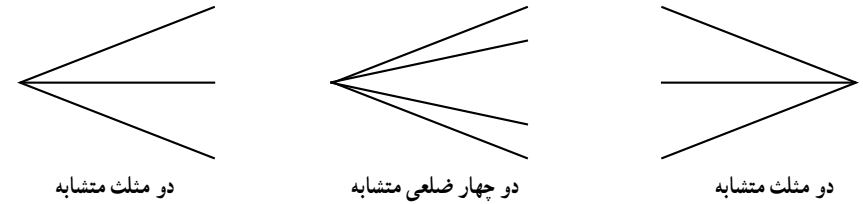
است؟ به همین ترتیب شرط تشابه را برای نقاط دیگری از شکل بررسی کنید.



۱۰- کدام مثلث با مثلث مقابل متشابه است؟



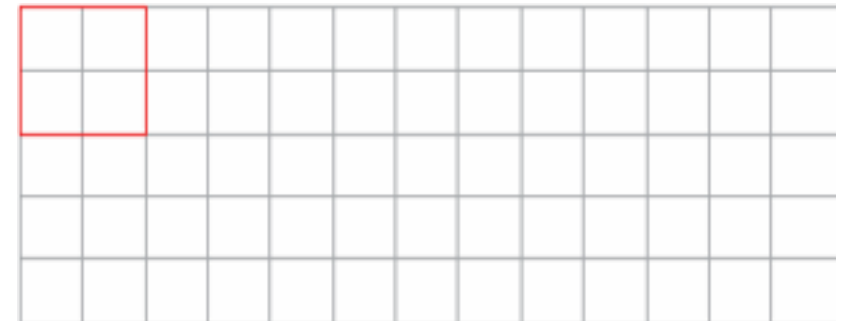
حالا شما به کمک خطوط زیر شکل های متشابه بسازید.



به نسبت ضلع متناظر دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.

کار در کلاس

۱- مربع متشابه با مربع زیر به نسبت تشابه $1/4$ را رسم کنید. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟



۲- در صفحه مختصات نقاط زیر را پیدا کنید.

$$\text{مثلث } ABC = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثلث } A'B'C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

طول ضلع های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها

را بررسی کنید. در صورت متشابه بودن نسبت تشابه را پیدا کنید.

