

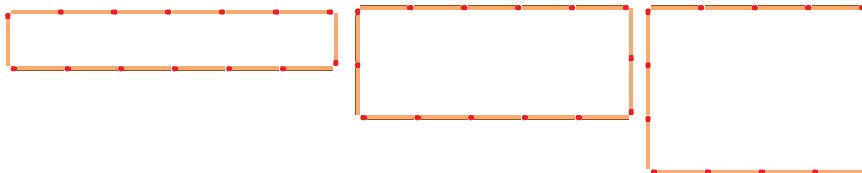
## درس سوم

## بهینه سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می دهند؛ به جاهای مختلفی می روند، از وسایل متنوعی استفاده می کنند، خرید می کنند، درس می خوانند و ... در تمام این فعالیت ها، هدف آن است که بهترین تصمیم ها اتخاذ گردند. به عنوان مثال، یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که ضمن کاهش هزینه های خود به حداقل مقدار ممکن، دارای بیشترین درآمد باشد. یا اینکه یک باغدار را در نظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله هایی را مسائل بهینه سازی می نامیم. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

## فعالیت

فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هر کدام از آنها را یک واحد در نظر بگیریم. با استفاده از همه این چوب کبریت ها، مستطیل می سازیم. نتیجه کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است :



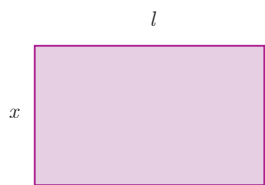
(الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل ها ثابت و برابر ..... واحد است.

(ب) در این مستطیل های هم محیط، دیده می شود که مساحت ها برابر ..... و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و ..... واحد مربع هستند. در واقع مشاهده می کنیم که هرچه قدر طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک تر می شود، اندازه مساحت آن افزایش می یابد. جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن برخی مقادیر اعشاری نیز برای طول و عرض مستطیل آمده است.

ابعاد مستطیل	$1 \times 6$	$2 \times 5$	$3 \times 4$	$2/5 \times 4/5$	$3/2 \times 3/8$
مساحت مستطیل	۶	۱۰	۱۲	۱۱/۲۵	۱۲/۱۶

(پ) در جدول بالا، بزرگ ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می شود،  $12/16$  است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد  $12/16$  واحد مربع هم بزرگ تر باشد؟

(ت) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ ترین مقدار ممکن می شود، چه حدسی می زنید؟  
درستی نتیجه ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق ثابت می کنیم.



مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن برابر باشند.

حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل  $x$  و  $l$  باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$$S = x.l \quad (1)$$

برای آنکه  $S$  به صورت تابعی از  $x$  بیان شود، می‌توانیم  $l$  را بر حسب  $x$  به دست آوریم و در رابطه (۱) قرار دهیم.

محیط مستطیل:  $P = 14$

$$2(x + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x$$

از جایگذاری در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$S_{(x)} = x(7 - x)$$

$$S_{(x)} = -x^2 + 7x, \quad x \in [0, 7]$$

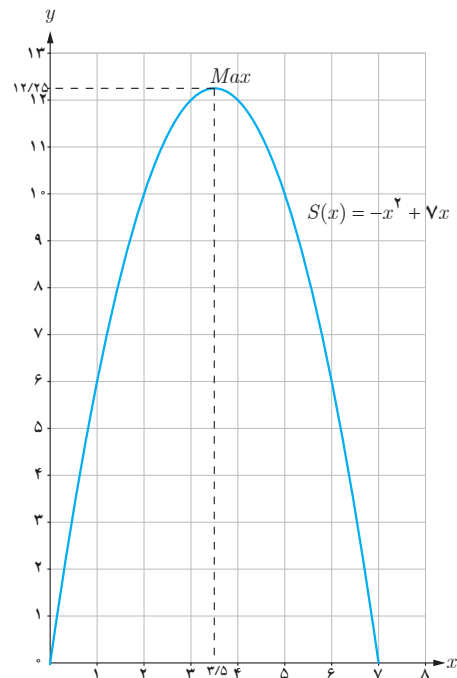
$S$  تابعی پیوسته است که بنابر قضیه مقدار اکسترمم، در بازه بسته  $[0, 7]$  هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق. از آنجا که  $S$  همواره مشتق پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله  $S'(x) = 0$  را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5$$

(طول نقطه بحرانی تابع  $S$ )

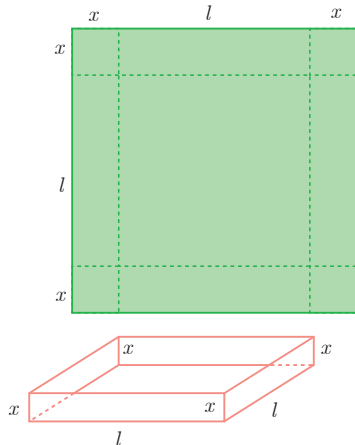
جدول تغییرات تابع  $S$  در بازه موردنظر به شکل زیر است:

$x$	۰	۳/۵	۷
$S'(x) = -2x + 7$		+	-
$S(x)$	۰	↗ ۱۲/۲۵ ↘ ماکزیمم مطلق	۰



از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت،  $12/25$  سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل باهم برابر و مساوی  $3/5$  سانتی‌متر باشند. نمودار تابع  $S$  را هم رسم کرده‌ایم.

در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود و با استفاده از طول نقطه رأس سهمی ( $x = -\frac{b}{2a}$ ) که در سال‌های قبل آموخته بودیم نیز می‌توانستیم مقدار اکسترمم آن را به دست آوریم. اما همیشه تابع‌های مورد نظر درجه ۲ نخواهند بود. مثال‌های زیر را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع  $x$  برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک قوطی در باز بسازیم. مقدار  $x$  چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل: طول و عرض قاعده مکعب حاصل برابر  $l$  و ارتفاع آن مساوی  $x$  است. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است:

$$V = x \cdot l^2$$

باید  $l$  را بر حسب  $x$  در این رابطه قرار دهیم تا  $V$  تابعی از  $x$  شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x, \quad x \in [0, 15]$$

باز هم  $V$  تابعی پیوسته است که بنا بر قضیه مقدار اکسترمم، در بازه بسته  $[0, 15]$  دارای هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق است. نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم.

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=15 \end{cases} \quad (\text{نقاط بحرانی تابع } V)$$

جدول تغییرات تابع  $V$  در بازه مورد نظر به صورت زیر است:

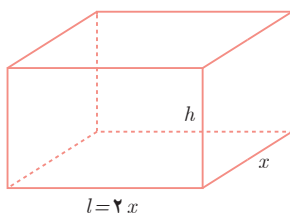
$x$	۰	۵	۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$	+	۰	-
$V(x)$	۰	۲۰۰۰	۰

↗ ماکزیمم مطلق ↘

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل مورد نظر  $2000 \text{ cm}^3$  است که به ازای  $x = 5 \text{ cm}$  حاصل می‌شود.

مثال ۳: می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل در باز بسازیم که حجم آن  $10 \text{ m}^3$  بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع  $100$  هزار تومان و این قیمت برای دیوارها در هر متر مربع  $60$  هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل: لازم است هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود.



$$C = 100(x \cdot l) + 60[2xh + 2lh]$$

$$= 100xl + 120h(x + l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$

$$C = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت:

می‌خواهیم  $C$  را به شکل تابعی از  $x$  بنویسیم.

حجم مخزن :  $V = 10$

$$x.l.h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2}$$

با جایگذاری در رابطه (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = 20 \cdot x^2 + 36 \cdot x \left( \frac{5}{x^2} \right)$$

$$C(x) = 20 \cdot x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع را به دست می‌آوریم :

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 40 \cdot x + \frac{-1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 40 \cdot x = \frac{1800}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} = 1/65(x) \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع  $C$ ، لازم است مشتق آن یعنی  $C'(x) = \frac{40 \cdot x^3 - 1800}{x^2}$  را تعیین علامت کنیم که علامت  $C'$  در هر بازه با علامت صورت مشتق یعنی  $(400 \cdot x^3 - 1800)$  یکسان است.

$x$	$0$	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		-	+
$C(x)$	$+\infty$	$\approx 1635$	$+\infty$

مینیمم مطلق  $C$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعده مخزن برابر  $\sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m)$  انتخاب شود هزینه مصالح، کمترین مقدار ممکن و معادل ۱۶۳۵ هزار تومان یعنی ۱,۶۳۵,۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴ : غلظت یک داروی شیمیایی در جریان خون،  $t$  ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه  $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$  به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟  
حل : ابتدا نقاط بحرانی تابع  $C$  را به دست می‌آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

در  $C'(t)$ ، علامت مخارج همواره مثبت است، بنابراین علامت  $C'(x)$  با علامت صورت آن یکسان خواهد بود.

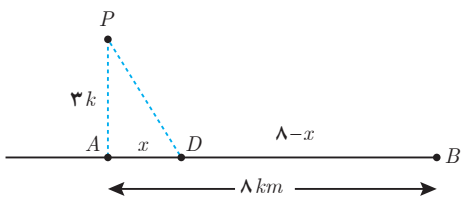
$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} \approx 2/38$$

جدول تغییرات تابع  $C$  به شکل زیر است :

$t$	$0$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$C'(t)$	$+$	$0$	$-$
$C(t)$	$0$	ماکزیمم مطلق $C$	

با توجه به جدول، دیده می‌شود که  $\frac{3}{\sqrt{2}} = 2/38$  ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.  
**مثال ۵:** فردی درون قایقی در نقطه  $P$  قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل مستقیم یعنی نقطه  $A$ ، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه  $B$  در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری  $A$  قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی او در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به  $B$  برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی  $B$  پیاده‌روی کند؟



حل: نقطه‌ای از ساحل که پیاده می‌شود را  $D$  می‌نامیم. زمان پارو زدن مسیر  $P$  تا  $D$

$$t_1 = \frac{PD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9}$$

$$t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 9} + (2 - \frac{1}{4}x) \quad x \in [0, 8]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق  $t$  هستیم. نقطه بحرانی  $t$  را به دست می‌آوریم.

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1/73 \text{ (km)}$$

جدول تغییرات  $t(x)$  به صورت زیر است :

$x$	$0$	$\sqrt{3}$	$8$
$t'(x)$	$-$	$0$	$+$
$t(x)$	$3/5$	$\frac{8+3\sqrt{3}}{4} \approx 3/3$	$\frac{\sqrt{73}}{2} \approx 4/27$
بر حسب ساعت		مینیمم مطلق $t$	

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر  $x$  برابر  $\sqrt{3} \approx 1.73$  کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن شخص از  $P$  به  $B$  کمترین زمان ممکن یعنی حدود  $3/3$  ساعت خواهد بود.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی ارائه کنید که تفاضل آنها  $10^\circ$  باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۲ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با عرض مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای  $4/5$  متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.



۳ می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی را طوری بیابید که هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.