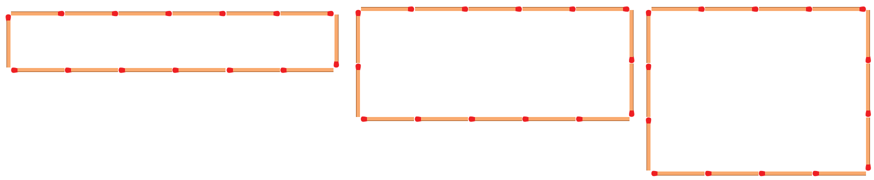
درس سوم

بهینه‌سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و … . در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که ضمن کاهش هزینه‌های خود به حداقل مقدار ممکن، دارای بیشترین درآمد باشد. یا اینکه یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی را مسائل بهینه‌سازی می‌نامیم. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است :



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر ……… واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم‌محیط، دیده می‌شود که مساحت‌ها برابر ……… و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و …… واحد مربع هستند. در واقع مشاهده می‌کنیم که هرچقدر طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، اندازهٔ مساحت آن افزایش می‌یابد.

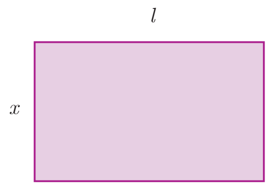
جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن برخی مقادیر اعشاری نیز برای طول و عرض مستطیل آمده است.

ابعاد مستطیل	۱×۶	۲×۵	۳×۴	۲/۵×۴/۵	۳/۲×۳/۸
مساحت مستطیل	۶	۱۰	۱۲	۱۱/۲۵	۱۲/۱۶

پ) در جدول بالا، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟

ت) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق ثابت می‌کنیم.



مثال ۱ : نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن برابر باشند.

حل : فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است :

$$S = x.l \qquad (۱)$$

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به‌دست آوریم و در رابطهٔ (۱) قرار دهیم.

محیط مستطیل : $P = ۱۴$

$$۲(x+l) = ۱۴ \Rightarrow x+l = ۷ \Rightarrow l = ۷ - x$$

از جایگذاری در رابطه (۱) خواهیم داشت :

$$S_{(x)} = x(۷ - x)$$

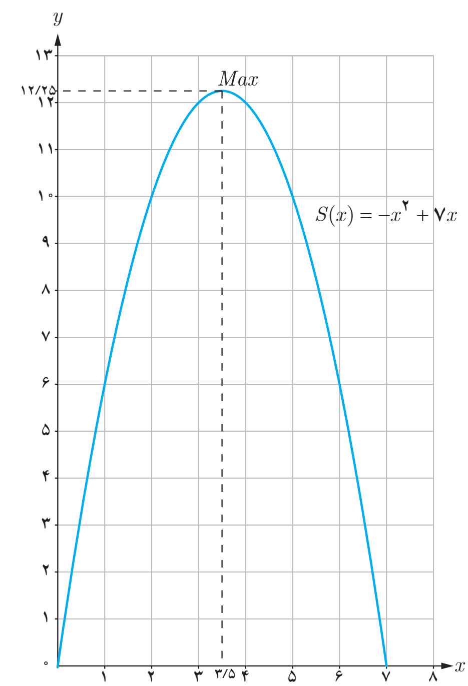
$$S_{(x)} = -x^{۲} + ۷x \quad , \quad x \in [۰,۷]$$

S تابعی پیوسته است که بنابر قضیهٔ مقدار اکسترمم، در بازهٔ بستهٔ $[۰،۷]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق. از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را بیابیم.

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵$$ (طول نقطهٔ بحرانی تابع S)

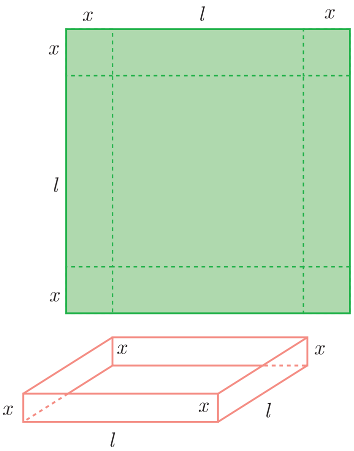
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به شکل زیر است :

x	۰		۳/۵		۷
$S'(x) = -۲x + ۷$		+	۰	−	
$S(x)$	۰	↗	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰



از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل باهم برابر و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشد. نمودار تابع S را هم رسم کرده‌ایم.

در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود و با استفاده از طول نقطهٔ رأس سهمی $(x=-\frac{b}{۲a})$ که در سال‌های قبل آموخته بودیم نیز می‌توانستیم مقدار اکسترمم آن را به‌دست آوریم. امّا همیشه تابع‌های موردنظر درجه ۲ نخواهند بود. مثال‌های زیر را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲ : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را درنظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک قوطی درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل : طول و عرض قاعدهٔ مکعب حاصل برابر l و ارتفاع آن مساوی x است. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است : $V=x.l^{۲}$

باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی از x شود.

$$۲x+l=۳۰ \Rightarrow l=۳۰-۲x \Rightarrow V=x(۳۰-۲x)^{۲}$$

$$V(x)=x\,(۹۰۰-۱۲۰x+۴x^{۲}) \Rightarrow V(x)=۴x^{۳}-۱۲۰x^{۲}+۹۰۰x \;,\; x\in[۰,۱۵]$$

باز هم V تابعی پیوسته است که بنابر قضیهٔ مقدار اکسترمم، در بازهٔ بستهٔ $[۰,۱۵]$ دارای هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق است. نقاط بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم.

$$V'(x)=۰ \Rightarrow ۱۲x^{۲}-۲۴۰x+۹۰۰=۰ \Rightarrow x^{۲}-۲۰x+۷۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x-۱۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=۱۵ \end{cases} \quad (\text{نقاط بحرانی تابع } V)$$

جدول تغییرات تابع V در بازهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

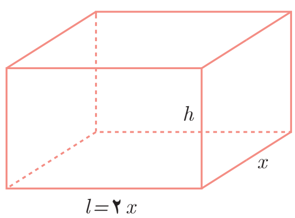
x	۰		۵		۱۵
$V'(x)=۱۲x^{۲}-۲۴۰x+۹۰۰$		+	۰	−	۰
$V(x)$	۰	$\nearrow$	۲۰۰۰ ماکزیمم مطلق	$\searrow$	۰

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل موردنظر $۲۰۰۰\ cm^{۳}$ است که به ازای $x=۵\ cm$ حاصل می‌شود.

مثال ۳ : می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $۱۰\ m^{۳}$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل : لازم است هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود.

تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت :



$$C=۱۰۰(x.l)+۶۰[۲xh+۲lh]$$
$$=۱۰۰xl+۱۲۰h(x+l)$$
$$=۱۰۰x(۲x)+۱۲۰h(x+۲x)$$
$$C=۲۰۰x^{۲}+۳۶۰xh \qquad (۱)$$

می‌خواهیم C را به شکل تابعی از x بنویسیم.

حجم مخزن : $V=10$

$$x.l.h=10 \Rightarrow x(2x)h=10 \Rightarrow h=\frac{5}{x^2}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$C(x)=200x^2+360x(\frac{5}{x^2})$$

$$C(x)=200x^2+\frac{1800}{x} \qquad x\in(0,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم :

$$C'(x)=0 \Rightarrow 400x+\frac{-1800}{x^2}=0 \Rightarrow 400x=\frac{1800}{x^2} \Rightarrow x^3=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{4/5}\simeq 1/65(x) \quad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x)=\frac{400x^3-1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم که علامت C' در هر بازه با علامت صورت مشتق یعنی $(400x^3-1800)$ یکسان است.

x	0		$\sqrt[3]{4/5}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 1635$ مینیمم مطلق C	$\nearrow$	$+\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعدهٔ مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5}\simeq 1/65(m)$ انتخاب شود هزینه مصالح، کمترین مقدار ممکن و معادل ۱۶۳۵هزار تومان یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴ : غلظت یک داروی شیمیایی در جریان خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+27}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل : ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم.

$$C'(t)=\frac{3(t^3+27)-3t^2(3t)}{(t^3+27)^2}$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، بنابراین علامت $C'(x)$ با علامت صورت آن یکسان خواهد بود.

$$C'(t)=0 \Rightarrow 3(t^3+27)-9t^3=0 \Rightarrow (t^3+27)-3t^3=0 \Rightarrow t^3=\frac{27}{2}$$

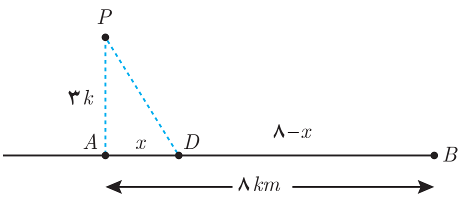
$$\Rightarrow t=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\simeq 2/38$$

جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	۰	$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$	$+\infty$
$C'(t)$	$+$	۰	$-$
$C(t)$	۰ $\nearrow$	ماکزیمم مطلق C	$\searrow$ ۰

با توجه به جدول، دیده می‌شود که $۲/۳۸ \simeq \frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

مثال ۵ : فردی درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل مستقیم یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B درساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی او در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟



حل : نقطه‌ای از ساحل که پیاده می‌شود را D می‌نامیم.

$t_۱ = \frac{PD}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}$: زمان پارو زدن مسیر P تا D

$t_۲ = \frac{DB}{۴} = \frac{۸-x}{۴} = ۲ - \frac{۱}{۴}x$: زمان پیاده‌روی مسیر D تا B

$t = t_۱ + t_۲$: زمان کل رسیدن از P به B

$$t(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹} + (۲ - \frac{۱}{۴}x) \qquad x \in [۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲x - \sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x - \sqrt{x^۲+۹} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + ۹ \Rightarrow x = \sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳(\text{km})$$

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است :

x	۰	$\sqrt{۳}$	۸
$t'(x)$	$-$	۰	$+$
$t(x)$ برحسب ساعت	$۳/۵$ $\searrow$	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴} \simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	$\nearrow$ $\frac{\sqrt{۷۳}}{۲} \simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x برابر $\sqrt{3} \simeq 1/73$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن شخص از P به B کمترین زمان ممکن یعنی حدود ۳/۳ ساعت خواهد بود.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی ارائه کنید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۲ دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای برروی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با عرض مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

۳ می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی را طوری بیابید که هزینه فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.