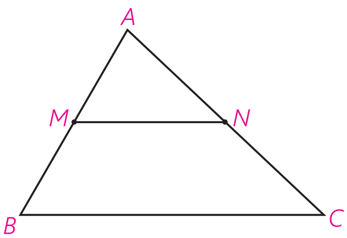
در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این‌گونه مسائل آورده شده است که مطالعهٔ آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

مثال ۱ : ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

اثبات :



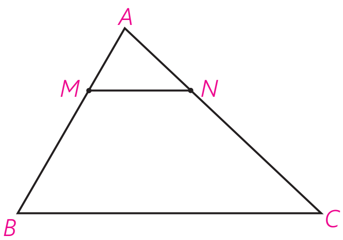
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$$

پس طول BC دو برابر طول MN است و چون $\overrightarrow{BC}$ مضربی از $\overrightarrow{MN}$ است لذا BC موازی MN است.



مثال ۲ : در مثلث ABC، $MN \| BC$ ثابت کنید :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

(قضیهٔ تالس)

اثبات : فرض کنیم $BA=K.MA$ و $AC=K'.AN$ و $BC=K''.MN$

بنابراین :

$$\overrightarrow{BA}=K.\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{AC}=K'.\overrightarrow{AN}\ ,\ \overrightarrow{BC}=K''.\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\ ,\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow$$

$$K.\overrightarrow{MA}+K'.\overrightarrow{AN}=K''.\overrightarrow{MN}=K''(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})=$$

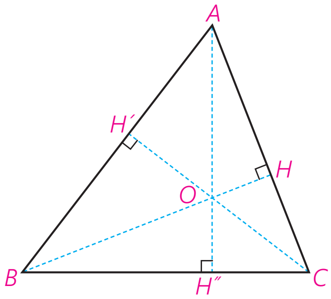
$$K''.\overrightarrow{MA}+K''.\overrightarrow{AN}\Rightarrow(K-K'')\overrightarrow{MA}+(K'-K'').\overrightarrow{AN}=\vec{0}$$

ولی $a\,\overrightarrow{MA}$ و $b\,\overrightarrow{AN}$ بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه :

$$K-K''=K'-K''=0$$

و در نتیجه : $K=K'=K''$ و از آنجا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳ : ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه همرس‌اند.



اثبات : فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند.
در این صورت داریم :

$$BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0,\ \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CH'}.\overrightarrow{AB}=0,\ \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}=0$$

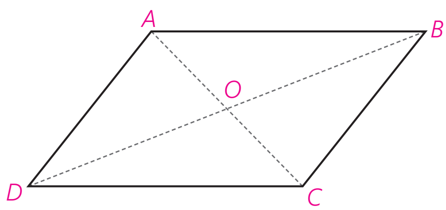
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$$

$$=(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AC}}_{0}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$$

$$-\underbrace{\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO هم بر BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴ : ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات : در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB=CD$ و $AB \parallel CD$
نتیجه می‌شود :

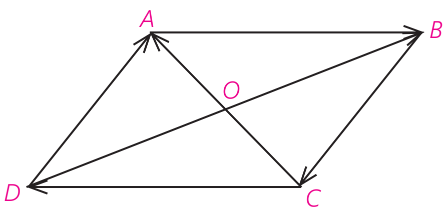
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و در نتیجه :

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$$

و بنابراین : $CB \parallel DA$ و $CB=DA$ و $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵ : ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات :



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}\end{array}\right\}+$$

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.