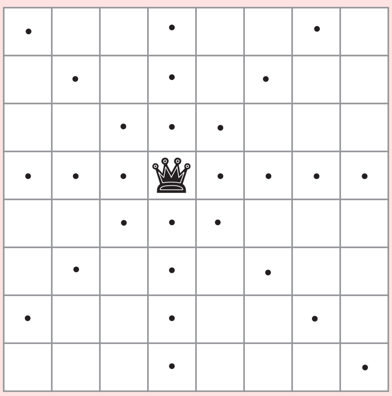
درس ۲ مدل‌سازی با گراف

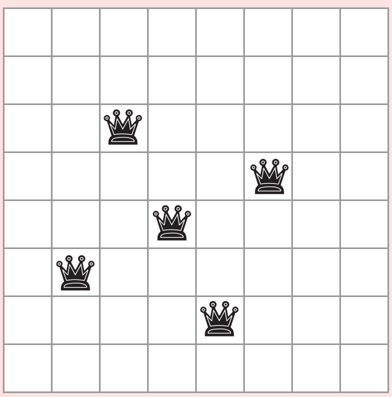
برخی مسائل زندگی واقعی را می‌توان به کمک مدل‌سازی آنها با یک مسئله ریاضی به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل کرد و با حل آن مسئله ریاضی، مسئلهٔ اولیهٔ مورد نظر را نیز حل کرد. بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

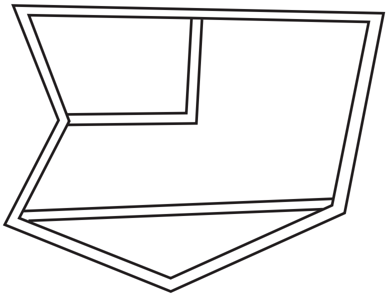
تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.

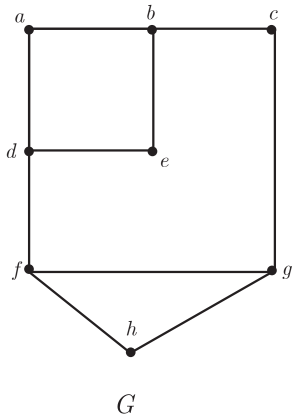




شکل مقابل نقشهٔ یک منطقه از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که شرایط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.



فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را توسط گراف مقابل مدل‌سازی کرده باشیم. در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

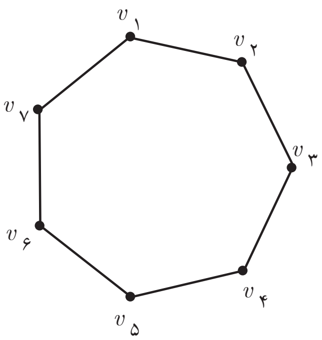
رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که با توجه به مدل‌سازی انجام شده اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورد گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

زیر مجموعهٔ D از رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف که در D نباشد حداقل به یکی از رئوس D وصل باشد.

به سادگی می‌توان دید که مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را می‌توان مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. حال در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ صدق خواهد کرد.

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر** مینیمم می‌نامیم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف** G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γــ مجموعه می‌گوییم.



مثال : برای گراف مقابل که دور C_7 است، مجموعهٔ $\{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1 , v_4 , v_7\}$ و $\{v_1 , v_2 , v_5\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γــ‌مجموعه‌اند و داریم $\gamma(G) = 3$.

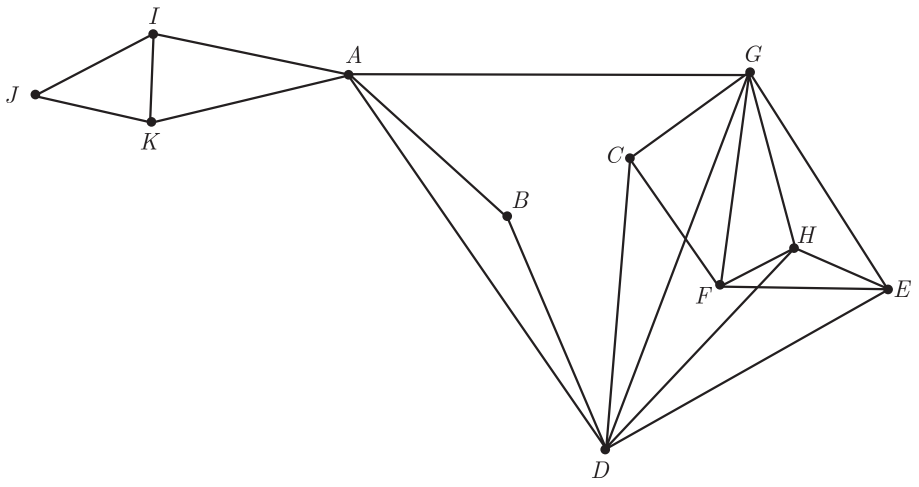
مثال : فرض کنید A، B، C، D، E، F، G، H، I، J و K، شهرهای یک استان باشد و فاصله‌های مستقیم شهرهای این استان دو به دو مطابق جدول زیر باشند.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
B	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
C	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
D	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
E	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
F	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
G	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
H	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
I	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
J	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
K	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

فرض کنید بخواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان بنا کنیم به‌طوری که تمام شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل : برای مدل‌سازی مسئلهٔ فوق کافی است گراف مربوط به مسئله مطرح شده را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

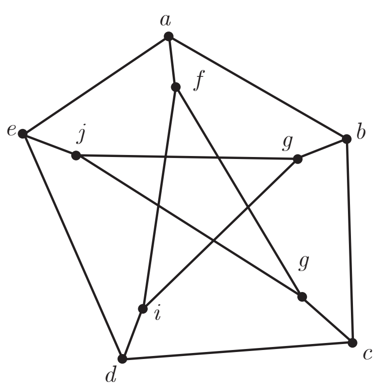
با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئله است.



حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ بین حال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام مجموعه برای گراف مقابل احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$

ت) $D=\{a,i,h\}$

ث) $E=\{f,g,h,e,d\}$

ج) $f=\{f,g,h,e\}$

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقیمانده هنوز احاطه‌گر باشد؟

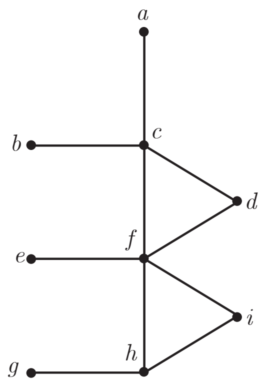
مجموعهٔ احاطه‌گر که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گری نباشد را احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید)

کار در کلاس



G

در گراف مقابل :

۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد.

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

۴ آیا رأس در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b و e و g را احاطه کند؟

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)

جزء صحیح یک عدد (کف یک عدد) و سقف یک عدد

با مفهوم جزء صحیح یک عدد آشنا هستیم و می‌دانیم که $[x]$ اگر x یک عدد صحیح باشد برابر با خود x است و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin Z \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد چند تاکسی نیاز هست؟

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز هست؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز هست؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز هست؟

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در حالی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از x از $\lceil x\rceil$ استفاده می‌کنیم. یعنی

$$\lceil x\rceil=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x\notin Z \end{cases}$$

بنابراین :

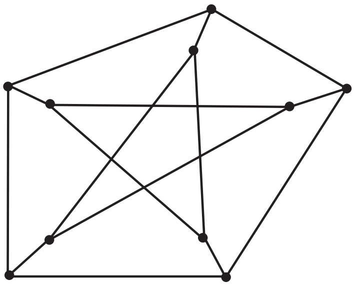
$[۳/۵]=۳$ $\quad$ $[۳]=۳$

$\lceil ۳/۵\rceil=۴$ $\quad$ $\lceil ۳\rceil=۳$

■ اگر a یک عدد حقیقی باشد $[a]$ را کف a[1] و $\lceil a \rceil$ را سقفِ a می‌نامیم.

■ سؤال : برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

فعالیت



G

۱ در هر گراف هر رأس، خودش و تمام همسایه‌هایش را احاطه می‌کند.

۲ در گراف مقابل Δ چند است؟

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟

۵ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟

۶ $\gamma(G)$ چند است؟

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

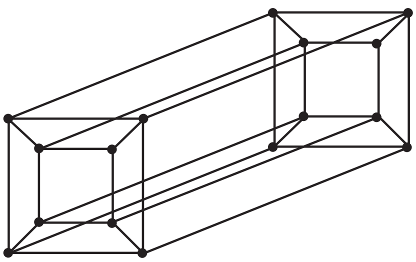
۸ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

بنابراین :

اگر G یک گراف n رأس با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ یک کراف پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود.

کار در کلاس

۱ فرض کنید یک شبکه متشکل از ۱۶ کامپیوتر باشد که هر یک از آنها مطابق شکل زیر به چند کامپیوتر دیگر متصل باشد.



گراف مقابل یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباطند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟

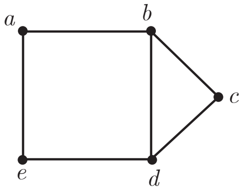
۱ــ $[a]$ را در برخی کتاب‌ها با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ a می‌گویند.

۲ با توجه به رابطهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

۳ گراف‌های $c_۹,c_{۱۰},p_۹,p_{۱۰}$ را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



G

مثال : عدد احاطه‌گری گراف مقابل را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \le ۲$.

اما اگر $\gamma(G)=۱$ یعنی یک رأس در گراف G هست که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأس با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأی وجود ندارد و لذا $\gamma(G)>۱$. بنابراین $۱<\gamma(G) \le ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

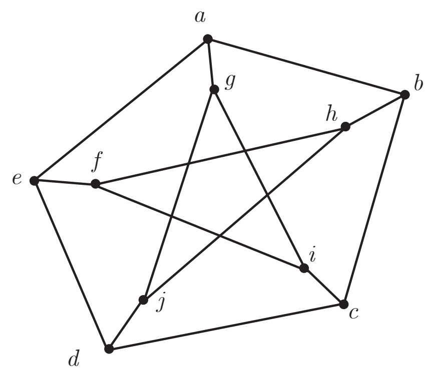
$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \le \gamma(G)$$

بنابراین $۲ \le \gamma(G)$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \le ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

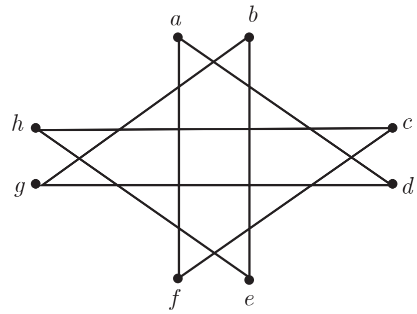
کار در کلاس

۱ تمام γـ مجموعه‌هایِ (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.



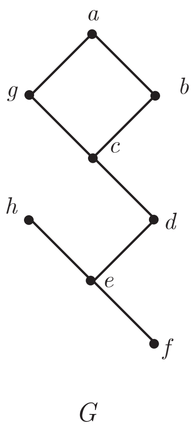
الف) G



ب) H

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف مقابل را مشخص کنیم.



الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $\left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطهٔ تمام رئوس این گراف کافی نیست.

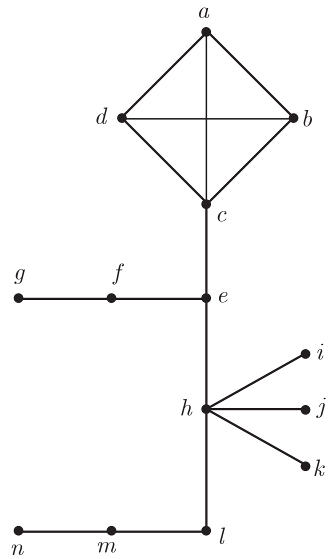
ب) برای احاطه‌کردن رئوس g,d,c,b,a حداقل دو تا از آنها باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. (چرا؟)

پ) برای احاطه‌کردن رئوس e,f,h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند. (چرا؟)

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G)\geq 3$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G)\leq 3$. پس $\gamma(G)=3$.

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف مقابل را مشخص نماییم.



الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\left\lceil \frac{14}{6} \right\rceil = 3$ را می‌دهد. پس $\gamma(G)\geq 3$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس $a،b،c،d$ باید انتخاب شود. چرا؟

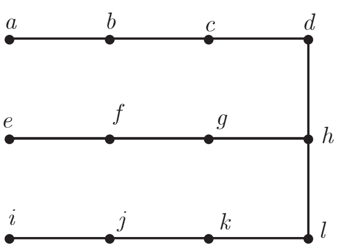
پ) حداقل یکی از رئوس $g،f،e$ باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رئوس $h،i،j،k$ باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس $n،m،l$ باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G)\geq 4$ و با توجه به اینکه $\{c،f،h،m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G)\leq 4$ بنابراین $\gamma(G)=4$.

مثال : عدد احاطه‌گری گراف مقابل را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.



حل : برای احاطه‌کردن رأس a یکی از دو رأس b,a لازم است که در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و بهتر است که رأس b انتخاب شود. (چرا؟) به همین صورت رئوس j,f را نیز می‌توان در مجموعهٔ احاطه‌گر در نظر گرفت. حال مجموعهٔ $\{b،f،j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس l,h,d را احاطه می‌کند و برای احاطهٔ این سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b،f،j،h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی‌توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی‌کند (چرا؟) باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً

۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم و چنین رأس‌هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.

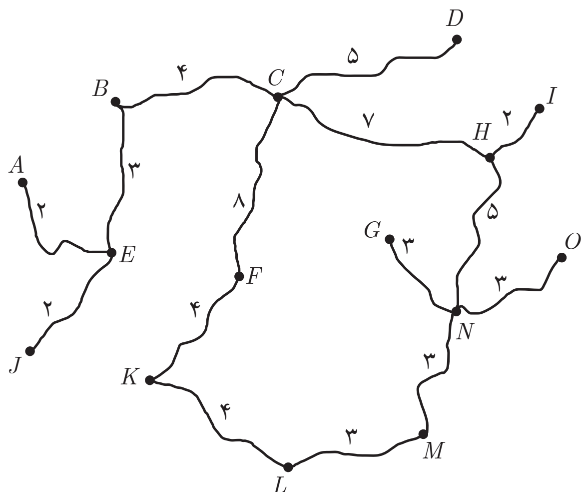
تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

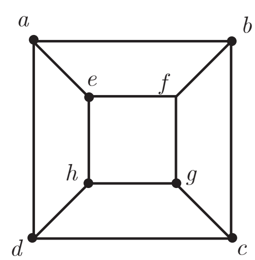
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر B احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین شهرها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

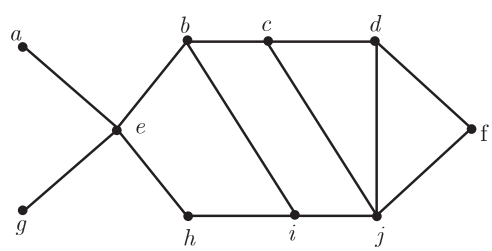


۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.

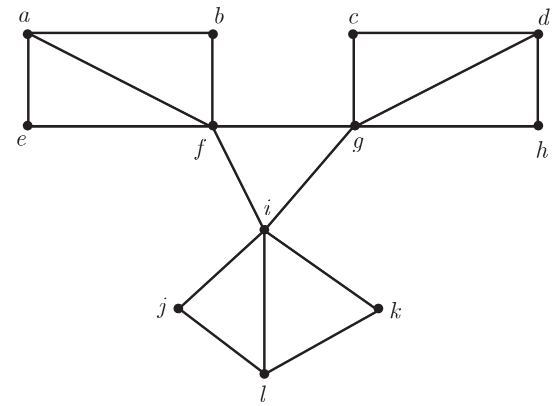
الف)



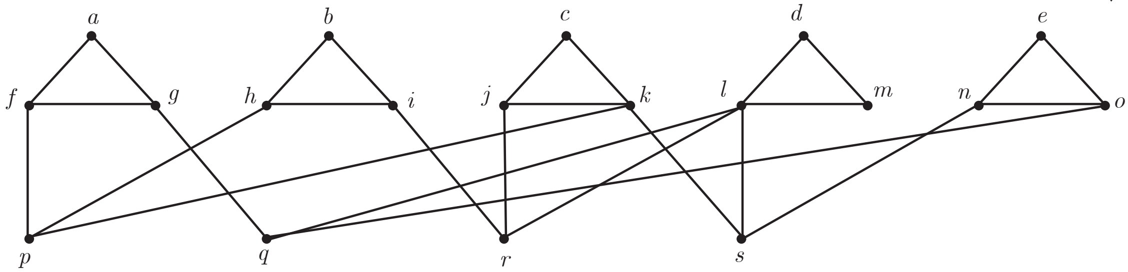
ب)



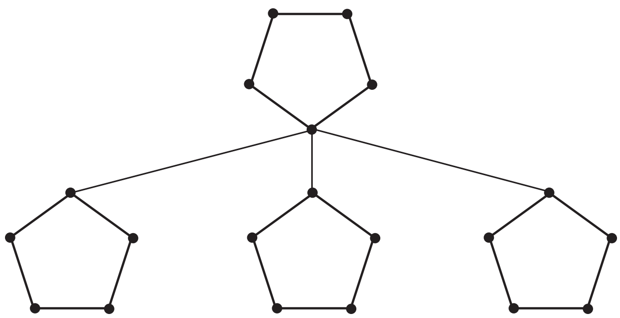
پ)



ت)



ث)



۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G، می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی که گراف G می‌تواند داشته باشد را مشخص کنید.)

۵ $\gamma(p_n)$ و $\gamma(c_n)$ را به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ مشخص کنید.

۶ اگر G یک گراف k منتظم n رأسی باشد، نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+1}\right\rceil \le \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲ــ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ فرض کنید k,n دو عدد طبیعی باشند و $k<\frac{n}{2}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ برای هر عدد طبیعی n توضیح دهید که چگونه می‌توانید یک درخت n رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن ۲ باشد.

۱۰ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۱۱ برای هر $n\in \mathbb{N}$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأس با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۲ گراف $p_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک γ ــ مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.