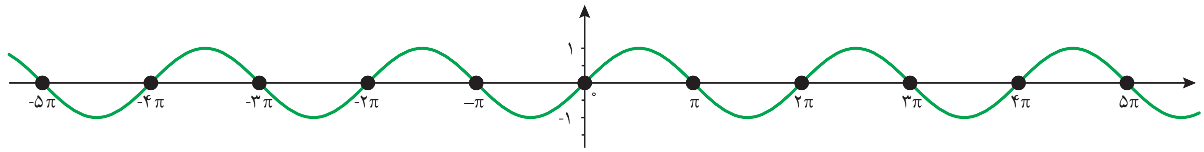
درس ۲

معادلات مثلثاتی

تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است را در نظر بگیرید.

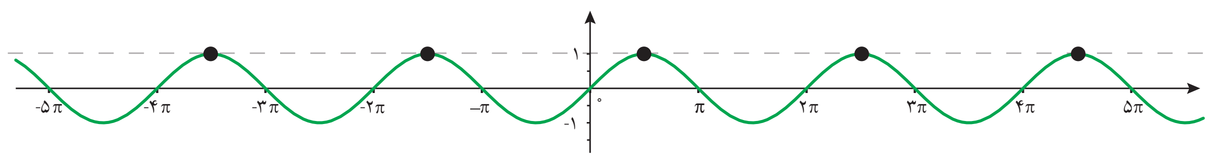


همان‌طور که در نمودار پیداست، ریشه‌های این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=۰$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت :

$x=\dots,-۳\pi,-۲\pi,-\pi,۰,\pi,۲\pi,۳\pi,\dots$

می‌باشند محل تقاطع تابع ثابت $y=۰$ (یعنی محورxها) و تابع $y=\sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=۱$ مقادیری از x هستند که سینوس آنها برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=۱$ و $y=\sin x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله فوق به‌صورت

$$x=\cdots,\frac{\pi}{۲}-۴\pi,\frac{\pi}{۲}-۲\pi,۰,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}+۲\pi,\dots$$

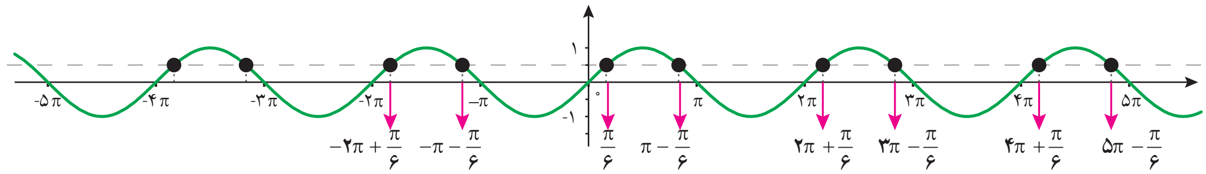
می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$ که k یک عدد صحیح است قابل نمایش هستند.

اکنون معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید. انجام مراحل زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

۱ با آزمون و خطا و یادآوری نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که قبلاً فراگرفته‌اید چند زاویه که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است را حدس بزنید و با جایگذاری در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ درستی حدس خود را بررسی کنید.

۲ خط $y = \frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری که حدس زده‌اید را روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟

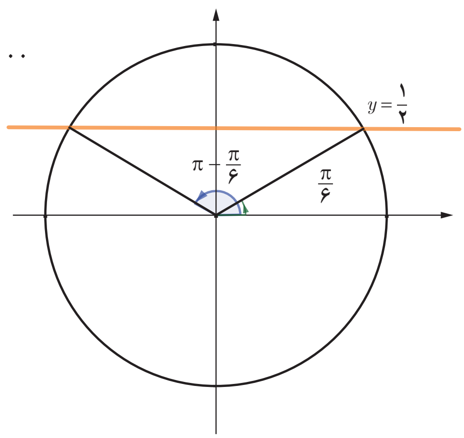


۳ طول نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

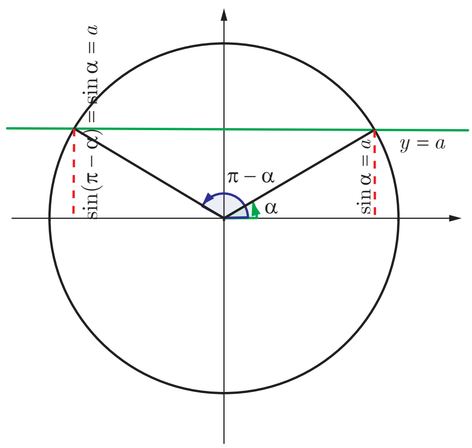
۳ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi - \frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots, \ldots\ldots, -۲\pi + \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}, \ldots\ldots, ۲\pi + \frac{\pi}{۶}, \ldots\ldots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots, \ldots\ldots, -\pi - \frac{\pi}{۶}, \ldots\ldots, ۳\pi - \frac{\pi}{۶}, \ldots\ldots$



همواره برای عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ که $\sin x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.



با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \qquad x=(۲k+۱)\pi-\alpha$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

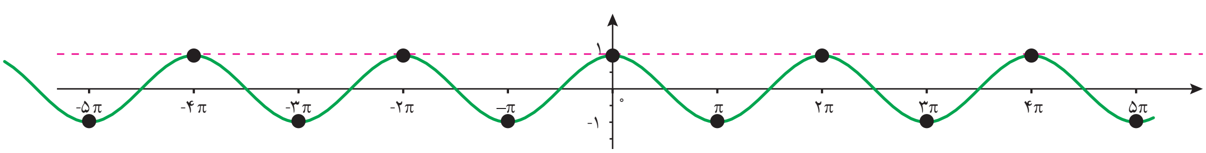
کار در کلاس

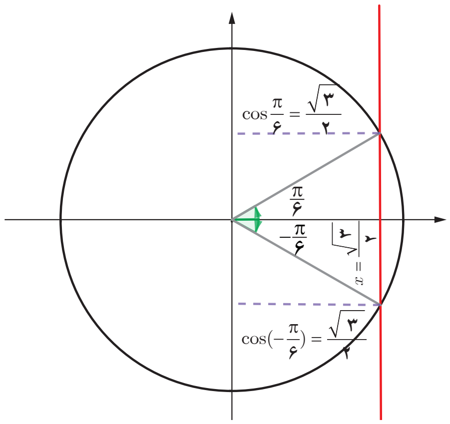
۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-۱=۰$

ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

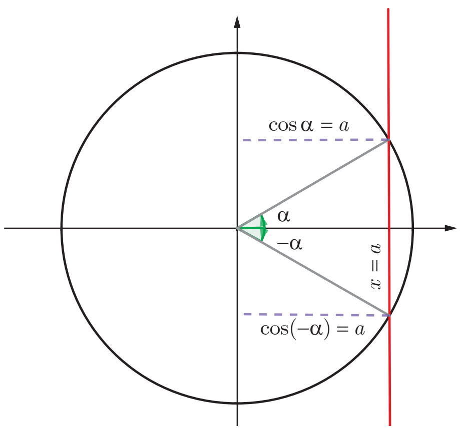
۲ نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.





الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.



برای هر عدد حقیقی $-۱\le a\le ۱$ معادله $\cos x=a$ برقرار است زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$. بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین کمان‌های x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad , \quad x=۲k\pi-\alpha$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳}=-۱$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند.

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق داریم :

k	x	عضویت در بازه
$k=۰$	$x=۲\times۰\times\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۰\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۱$	$x=۲\times۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۱$	$x=۲\times-۱\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۱\times\pi-\frac{\pi}{۳}=-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}\in[-۳\pi,\pi]$
$k=۲$	$x=۲\times۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times۲\times\pi-\frac{\pi}{۳}=۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
$k=-۲$	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi+\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$
	$x=۲\times-۲\times\pi+\frac{\pi}{۳}=-۴\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi-\frac{\pi}{۳}\notin[-۳\pi,\pi]$

می‌توان نشان داد که جواب‌هایی از معادله فوق که به ازای مقادیر دیگری از k تولید می‌شوند خارج بازه داده شده می‌باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-۲\pi-\frac{\pi}{۳},-۲\pi+\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin۲x=\sin۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+۳x\Rightarrow x=۲k\\ ۲x=(۲k\pi+۱)\pi-۳x\Rightarrow x=\frac{۲k+۱}{۵}\pi\end{cases}$$

مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$

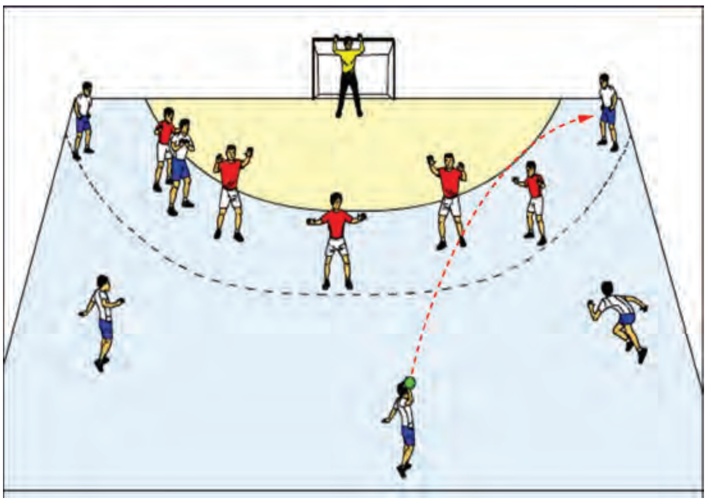
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت km/h ۱۲برای هم‌تیمی خود که در ۲۰ متری او قرار گرفته پرتاب می‌کند (به‌شکل نگاه کنید). اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲}{۳۲}\sin ۲\theta$$



مثال : جواب‌های معادله $\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۲} - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال : معادله $\sin x+\cos x=1$ را در بازه $0\leq x\leq 2\pi$ حل کنید.

$\sin x+\cos x=1$

$\sin x=1-\cos x$

$\sin^2 x=(1-\cos x)^2$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$\sin^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$ استفاده از رابطه $\sin^2=1-\cos^2 x$

$1-\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x-2\cos x=0$

$2\cos x(\cos x-1)=0 \Rightarrow 2\cos x=0$ یا $\cos x-1=0$

اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $0\leq x\leq 2\pi$ می‌یابیم :

$$2\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$
$$\cos x-1=0 \Rightarrow x=0$$

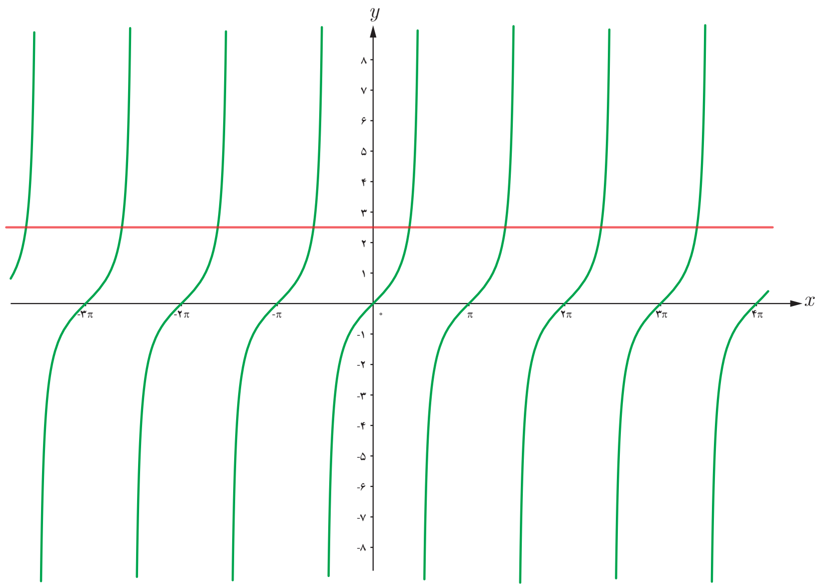
از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x=\frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x=0,\frac{\pi}{2}$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

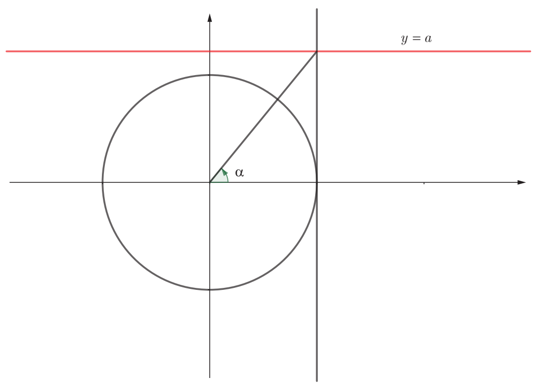
مثال : معادله $\cos(2\cos x-9)=5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x-9\cos x-5=0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t=\cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2-9t-5=0$ نوشت. جواب‌های این معادله به‌صورت $t=-\frac{1}{2}$ و $t=5$ به‌دست می‌آیند. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=5$ و $\cos x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x-2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

در شکل زیر تابع $y=\tan x$ و نیز تابع $y=a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x=a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a که $\tan x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan\alpha=a$. بنابراین معادله $\tan x=a$ به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x=\tan\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و a را بیابیم.





از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین کمان‌های x و a به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ که k یک عددی صحیح است می‌باشد.

جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال : معادله $\tan x=\tan 5x$ را حل کنید.

حل : جواب‌های این معادله از $5x=k\pi+x$ رابطه بین کمان‌های دو تابع به‌دست می‌آیند. بنابراین $x=k\frac{\pi}{4}$. البته باید توجه کرد فقط مقادیری از k قابل قبول هستند که به ازای آنها طرفین معادله فوق تعریف شده باشند. بنابراین با توجه به دامنه تابع‌های فوق، فقط مقادیری از $x=k\frac{\pi}{4}$ قابل قبول هستند که به ازای آنها کمان‌های x و $5x$ مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ نباشند.

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

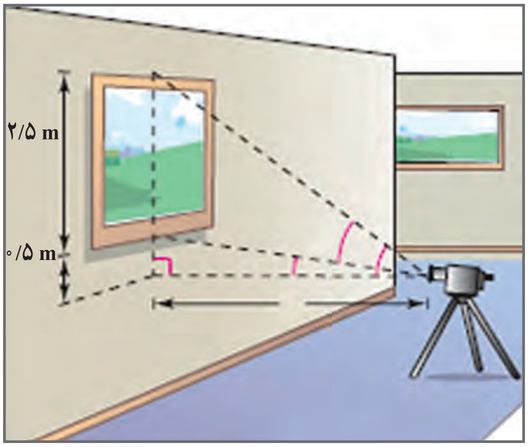
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال : نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به‌صورت زیر است.

$$\tan\beta=\frac{2/5\,x}{x^2+\frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به‌دست آورید.

حل : با توجه به شکل برای مثلث قائم‌الزاویه پایین شکل داریم :

$$\tan\alpha=\frac{0/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم :

$$\tan\theta=\frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به‌دست می‌آید :

$$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{x}-\frac{0/5}{x}}{1+\frac{3}{x}\times\frac{0/5}{x}}=\frac{\frac{2/5}{x}}{\frac{x^2+\frac{3}{2}}{x^2}}=\frac{2/5x}{x^2+\frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم :

$$x=1\rightarrow\tan\beta=\frac{2/5\times1}{1^2+\frac{3}{2}}=\frac{2/5}{2/5}=1$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan\frac{\pi}{4}=1$ پس جواب‌های معادله $\tan\beta=1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$$\beta=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta=\frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos2\alpha$ ب) $\sin2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin3x$ ب) $\cos2x-\cos x+1=0$

پ) $\cos x=\cos2x$ ت) $\cos2x-\sin x+1=1$

ث) $2\sin^2x+\sin x-1=0$ ج) $\sin x-\cos2x=0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟