فصل ۲

مثلثات

درس ۱

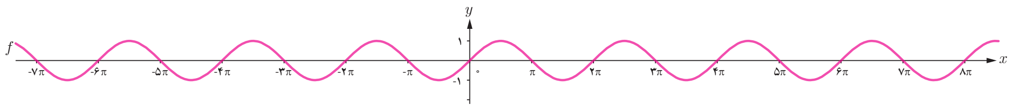
تناوب و تابع تانژانت

درستی رابطه $\sin(2k\pi \pm x) = \sin x$ را در سال گذشته دیدیم (یادآور می‌شویم که رابطه مشابهی برای $\cos x$ نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع $y = \sin x$ بر بازه‌های به طول 2π باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع $y = \sin x$ را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

در سال گذشته آموختیم که توابع مثلثاتی خاصیت تکرار شونده دارند. در این درس می‌خواهیم به این خاصیت با دقت بیشتری بپردازیم و تأثیر این خاصیت را بر رفتار توابع مثلثاتی بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا تابع $y=\sin (x)$ را بررسی می‌کنیم.

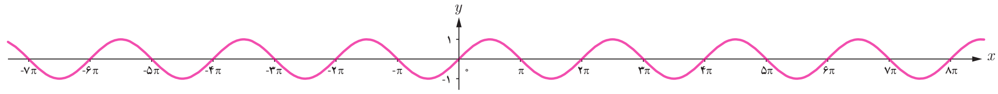
فعالیت

۱ نمودار تابع $y=\sin(x)$ در زیر داده شده است.

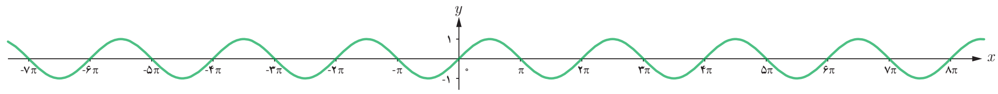


نمودار فوق را با مقادیر مختلف به سمت راست یا چپ انتقال داده‌ایم و نمودارهای زیر به‌دست آمده‌اند.

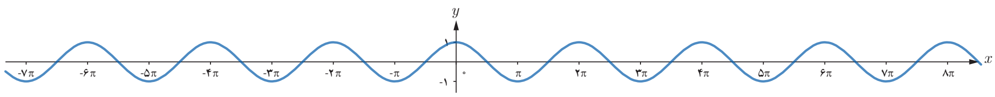
$y=\sin(x+۲\pi)$



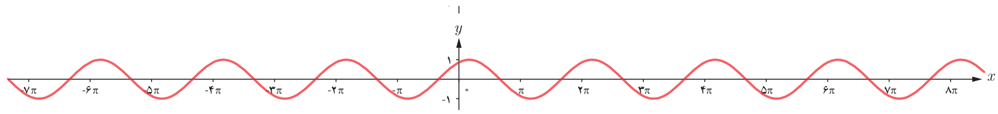
$y=\sin(x+۴\pi)$



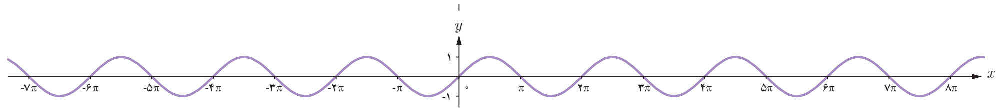
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$



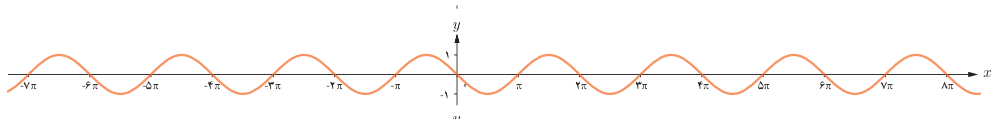
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$



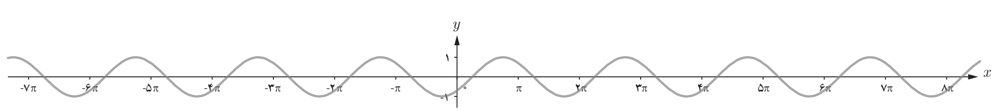
$y=\sin(x-۲\pi)$



$y=\sin(x-\pi)$



$y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

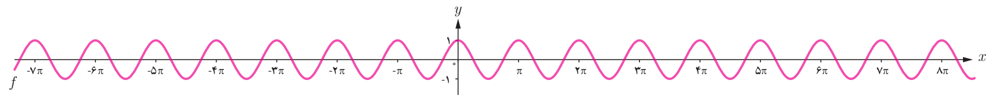


الف) از روی شکل بررسی کنید کدام یک از نمودارهای فوق با نمودار تابع $y=\sin(x)$ منطبق می‌شود؟

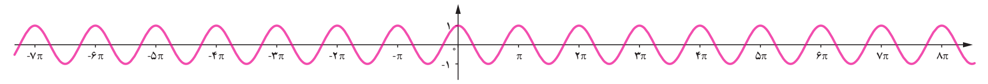
ب) نمودارهایی که بر نمودار تابع $y=\sin(x)$ منطبق می‌شوند با چه مقادیری انتقال داده شده‌اند؟ کوچک‌ترین آنها از نظر قدرمطلق چند است؟

۲ همانند سؤال قبل تابع $y=\cos(۲x)$ همراه با چند انتقال آن در زیر داده شده‌اند. بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.

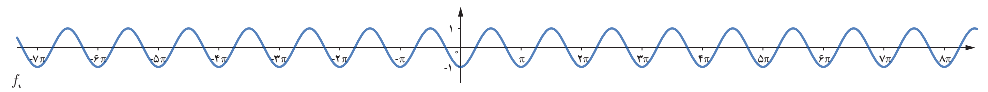
$y=\cos(۲x)$



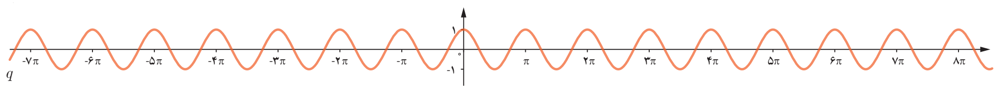
$y=\cos(۲x+۲\pi)$



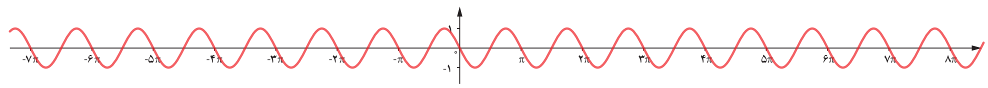
$y=\cos(۲x+۳\pi)$



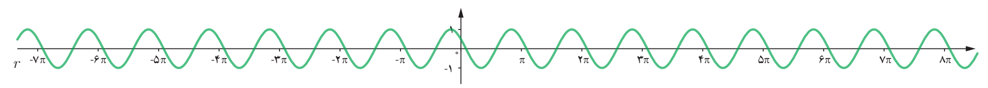
$y=\cos(۲x+۴\pi)$



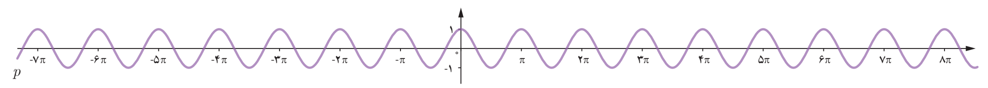
$y=\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})$



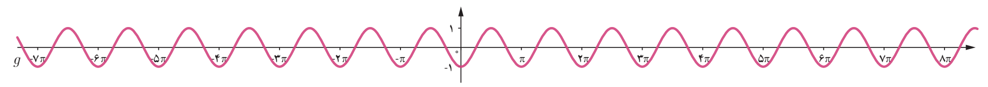
$y=\cos(۲x+\frac{\pi}{۳})$



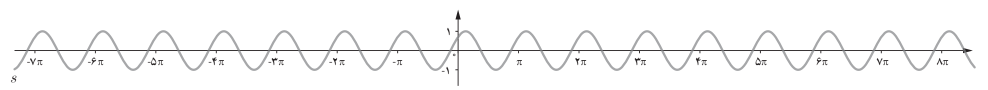
$y=\cos(۲x-۲\pi)$



$y=\cos(۲x-\pi)$



$y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$



۳ تابع $y=\sin(۳x)$ را همراه با چند انتقال آن همانند سؤالات قبل رسم کنید. سپس بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.

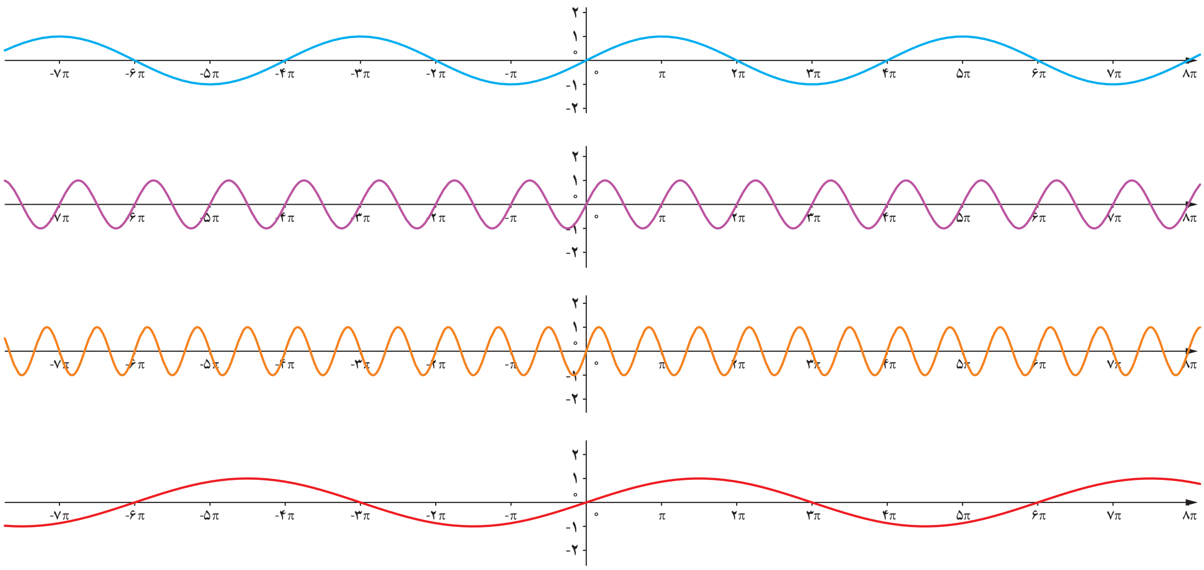
کار در کلاس

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sin ۴x$ ب) $g(x)=\cos\sqrt{۲}x$

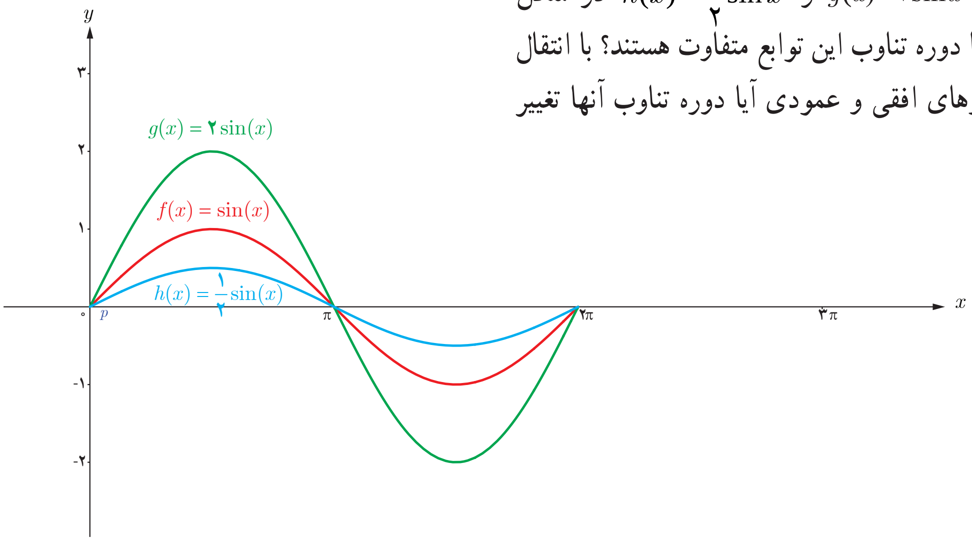
پ) $h(x)=\sin\frac{x}{۲}$ ت) $s(x)=\sin\pi x$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع $y=\sin x$ به صورت $x=k\pi$ که $k\in\mathbb{Z}$ می‌باشند. نمودار توابع $f(x)=\sin\frac{x}{۲}$ ، $m(x)=\sin ۳x$ ، $g(x)=\sin ۲x$ و $n(x)=-\sin —$ در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های $y=\sin ax$ چه حدسی می‌زنید؟



۳ با توجه به دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع $f(x)=\sin x$، $g(x)=۲\sin x$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}\sin x$ در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

> به‌طور کلی توابع مثلثاتی به‌صورت $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ که در آنها d، c، b، a اعداد حقیقی $(a,b\neq ۰)$ می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

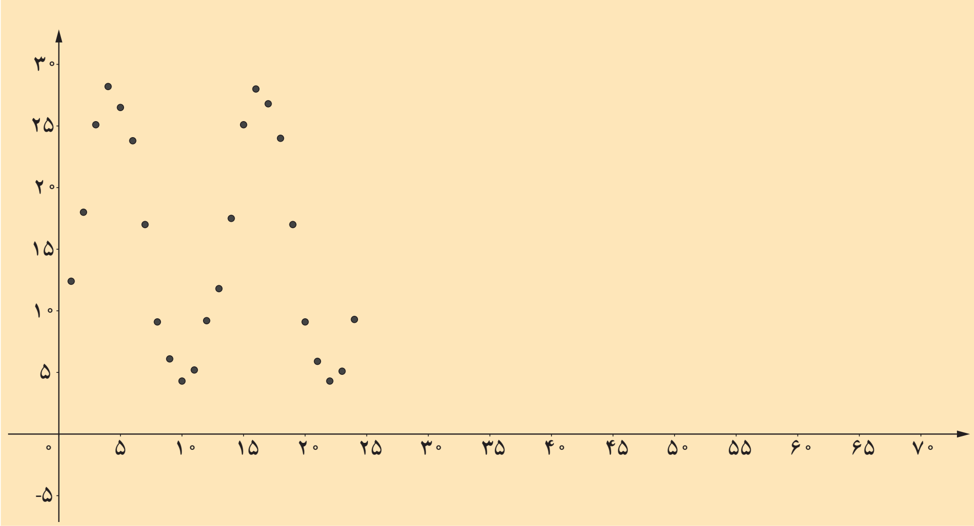
توابع متناوب[۱] برای مدل سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به‌کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به‌دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

مثال ۱ : داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به‌صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

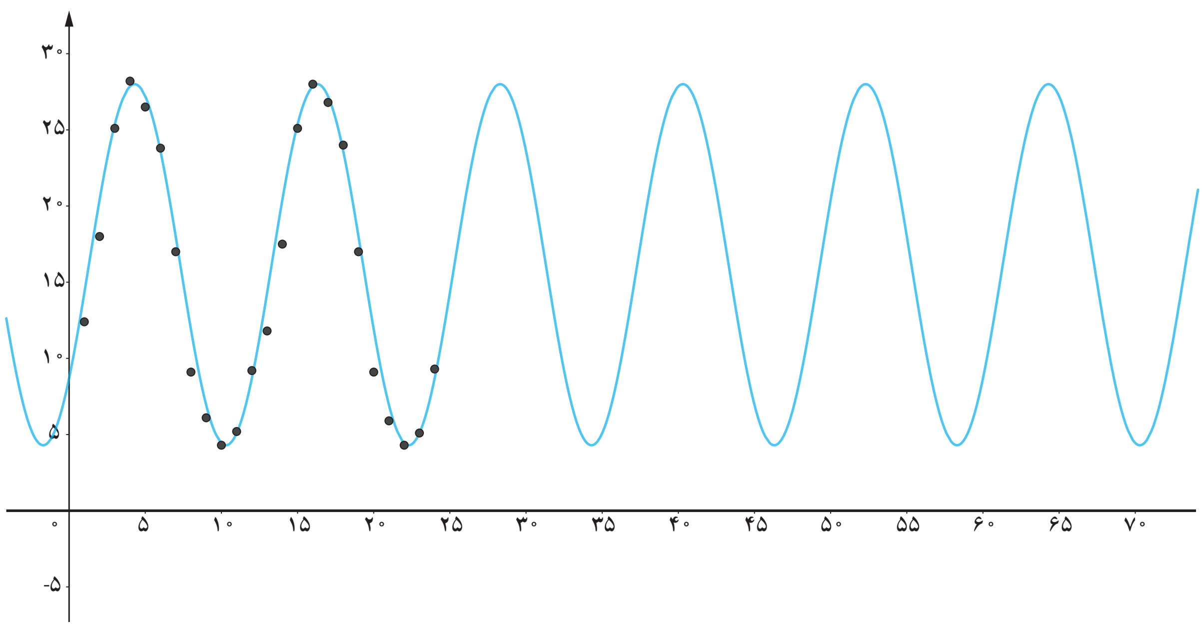
	داده‌های سال اول											
ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۲/۴	۱۸	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۵	۲۳/۸	۱۷	۹/۱	۶/۱	۴/۳	۵/۲	۹/۲

۱ــ در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به‌صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.

	داده‌های سال دوم											
ماه	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
دما	۱۱/۸	۱۷/۵	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۸	۲۴	۱۷	۹/۱	۵/۹	۴/۳	۵/۱	۹/۳



با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا $T=12$ است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع $T(t)=11/85\sin(\frac{\pi}{6}t)+16/15$ را که در آن t شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به‌دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده‌ها شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به‌صورت $T(t)=a\sin(bt)+c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول c، b، a به‌صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دوره تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم :

$$\frac{2\pi}{b}=12\rightarrow b=\frac{\pi}{6}$$

برای به‌دست آوردن a که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت :

$$a=\frac{28-4/3}{2}=11/85$$

برای به‌دست آوردن مقدار c کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم :

$$c=\frac{28+4/3}{2}=16/15$$

✤ **مثال ۲ :** مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به‌صورت $y=a\cos(bx)+c$ برای داده مناسب به‌نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

$$\frac{2\pi}{b}=12\rightarrow b=\frac{\pi}{6}$$

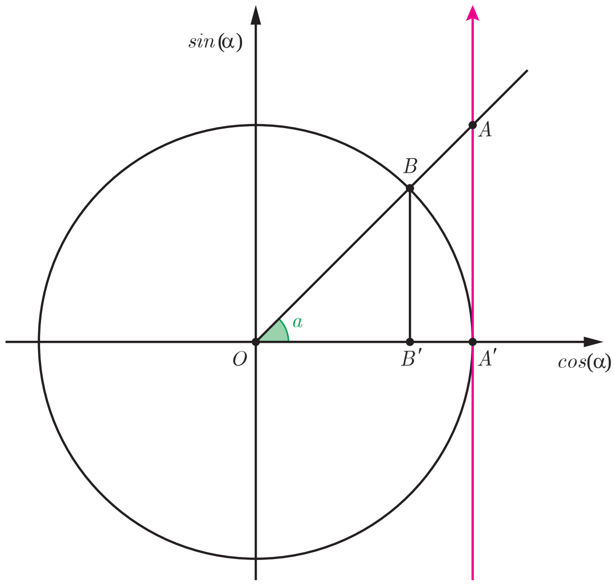
$$a=\frac{28-15}{2}=6/5$$

$$c=\frac{28+15}{2}=21/5$$

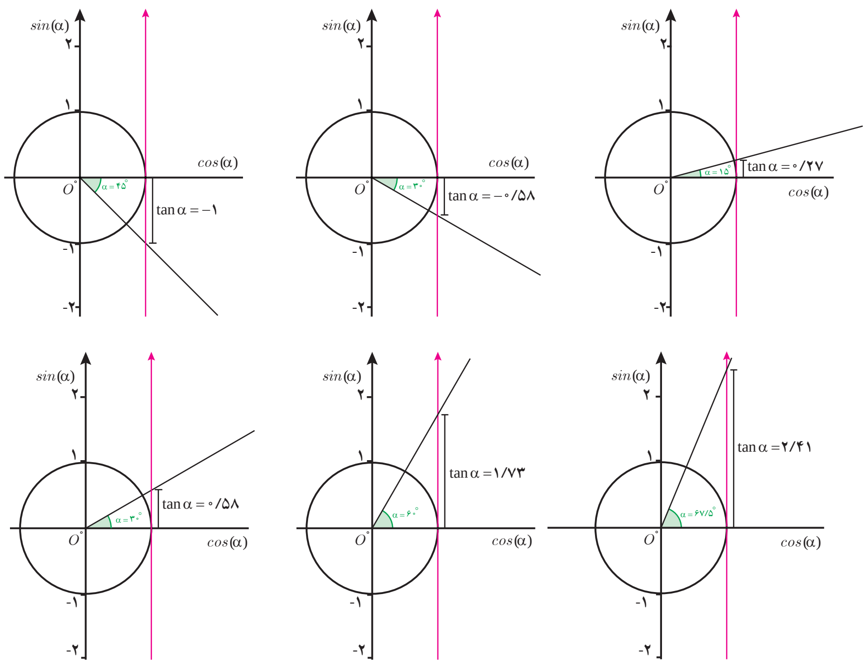
تابع تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه α و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط $x = ۱$ را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطه A قطع کند آن‌گاه اندازه پاره‌خط AA' برابر تانژانت زاویه α می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA' = \frac{BB'}{OB'} = \tan\alpha.$$



از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه α در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که زاویه α به زاویه °۹۰ نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



در فعالیت زیر تغییرات تابع $y=\tan\alpha$ را از $x=۰$ تا $x=۲\pi$ به کمک محور تانژانت و نیز جدول مقادیر تانژانت که از سال‌های قبل فراگرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تانژانت را به دست می‌آوریم.

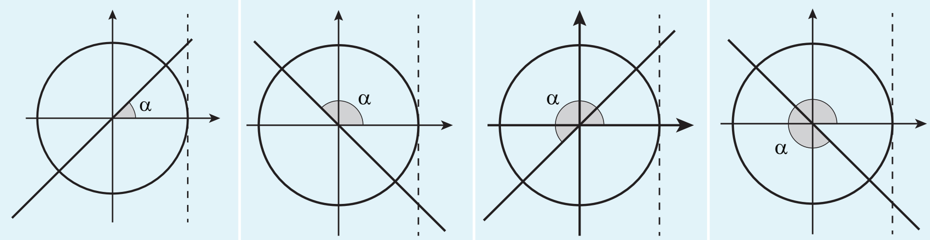
فعالیت

۱ در ردیف الف ازجدول زیر صعودی و نزولی بودن $\tan\alpha$ را با توجه به محور تانژانت در هر بازه تعیین نمایید.

۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار $\tan\alpha$ را به ازای مقادیر داده شده از α به دست آورید $(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \ , \ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \simeq ۰/۵۸)$.

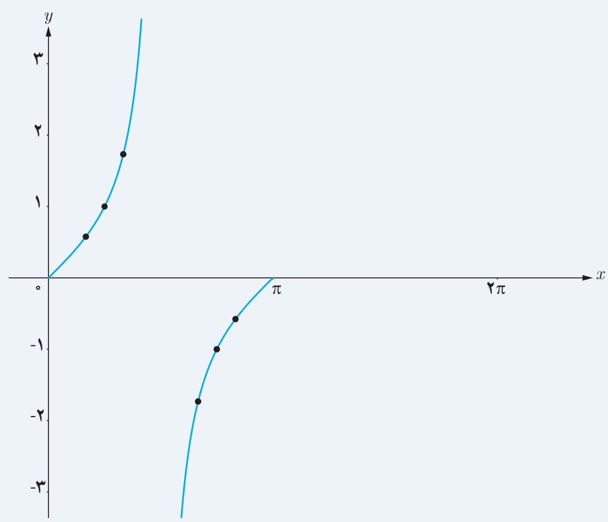
۳ در ردیف پ نمودار تابع $y=\tan\alpha$ را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به‌دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

α	$۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	π	$\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
الف	صعودی		....		....		....

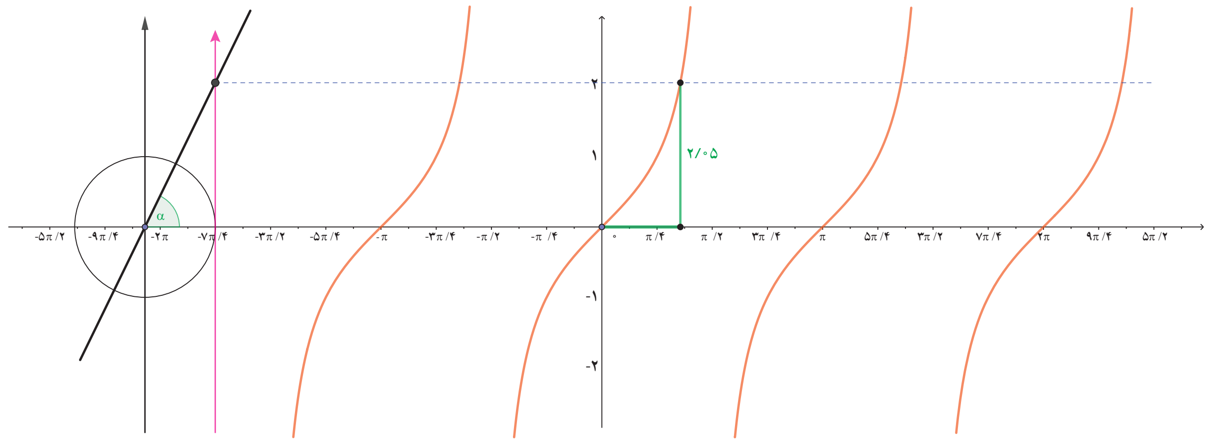


ب	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
	۰	۰/۵۸												

پ



همان‌طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی y=tanα برای مقادیر $x' = \frac{k\pi}{۲}$ تعریف می‌شود و نمودار آن در بازه $[-\frac{۳\pi}{۲},\frac{۹\pi}{۴}]$ به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی را که به موازات محورyها (محور سینوس) است، محور تانژانت می‌نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه α با آن محور بیانگر tanα است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



کار در کلاس

۱ آیا تابع y=tan$x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ یکنواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع y=tan$x$ را به بازه‌های بزرگ‌تر از π و کوچک‌تر از π− گسترش دهید. آیا تابع y=tan$x$ متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع y=tan$x$ دامنه و برد این تابع را بیابید.

تمرین

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲\sin ۷x$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

پ) $y=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$

ت) $y=-\pi+\sqrt{۲}\tan ۳x$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y=\sin \pi x$

ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$

پ) $y=۱-\cos ۲x$

ت) $y=-\frac{۱}{۲}\tan ۲x$

ث) $y=\sin ۲x$

ج) $y=\tan\frac{۱}{۲}x$