

## مثلثات

١ تناوب و تابع تاثیرات



فصل

# تناوب و تابع تانژانت

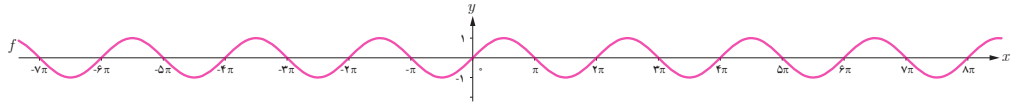


درس

درستی رابطه  $\sin(2k\pi \pm x) = \sin x$  را در سال گذشته دیدیم (یادآور می شویم که رابطه مشابهی برای  $\cos x$  نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع  $y = \sin x$  بر بازه‌های به طول  $2\pi$  باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی  $y = \sin ax$  و  $y = \cos ax$  بررسی می کنیم. ابتدا تابع  $y = \sin x$  را دقیق تر بررسی می کنیم.

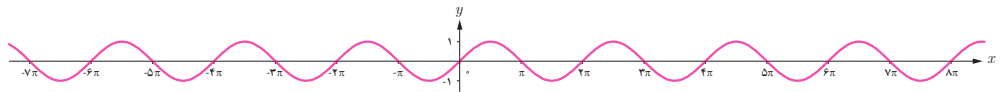
در سال گذشته آموختیم که توابع مثلثاتی خاصیت تکرار شونده دارند. در این درس می خواهیم به این خاصیت با دقت بیشتری بپردازیم و تأثیر این خاصیت را بر رفتار توابع مثلثاتی بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا تابع  $y = \sin(x)$  را بررسی می کنیم.

۱ نمودار تابع  $y = \sin(x)$  در زیر داده شده است.

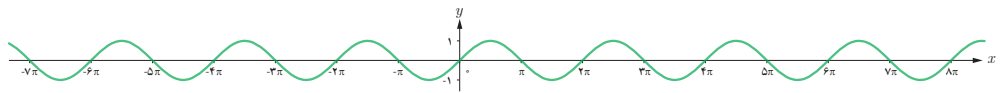


نمودار فوق را با مقادیر مختلف به سمت راست یا چپ انتقال داده ایم و نمودارهای زیر به دست آمده اند.

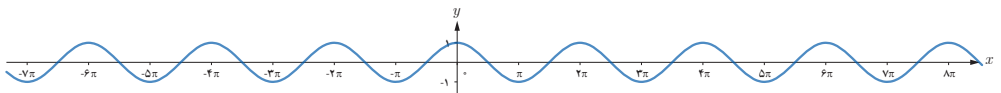
$$y = \sin(x + 2\pi)$$



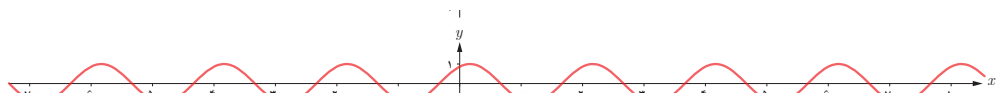
$$y = \sin(x + 4\pi)$$



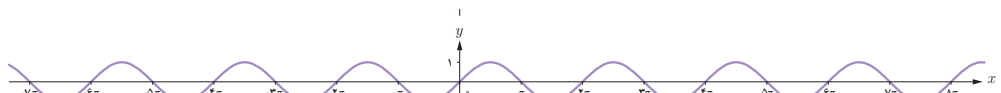
$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



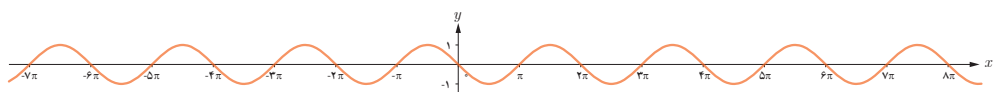
$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



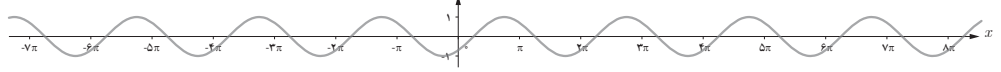
$$y = \sin(x - 2\pi)$$



$$y = \sin(x - \pi)$$



$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

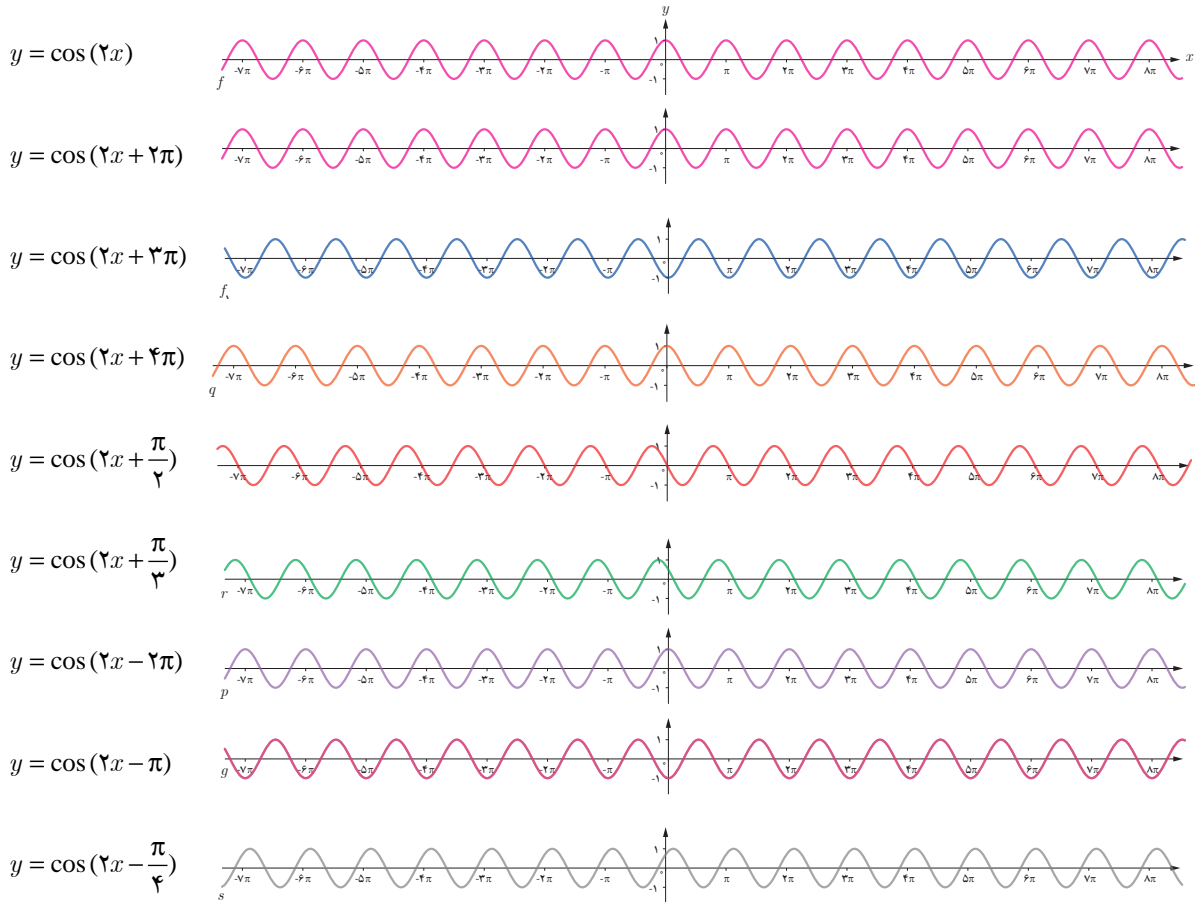


الف) از روی شکل بررسی کنید کدام یک از نمودارهای فوق با نمودار تابع  $y = \sin(x)$  منطبق می شود؟

ب) نمودارهایی که بر نمودار تابع  $y = \sin(x)$  منطبق می شوند با چه مقادیری انتقال داده شده اند؟ کوچک ترین آنها از نظر قدر مطلق

چند است؟

۲ همانند سؤال قبل تابع  $y = \cos(2x)$  همراه با چند انتقال آن در زیر داده شده‌اند. بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.



۳ تابع  $y = \sin(3x)$  را همراه با چند انتقال آن همانند سؤالات قبل رسم کنید. سپس بررسی کنید که کوچک‌ترین مقدار انتقال از نظر قدرمطلق چند باشد تا نمودار بر خودش منطبق شود.

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

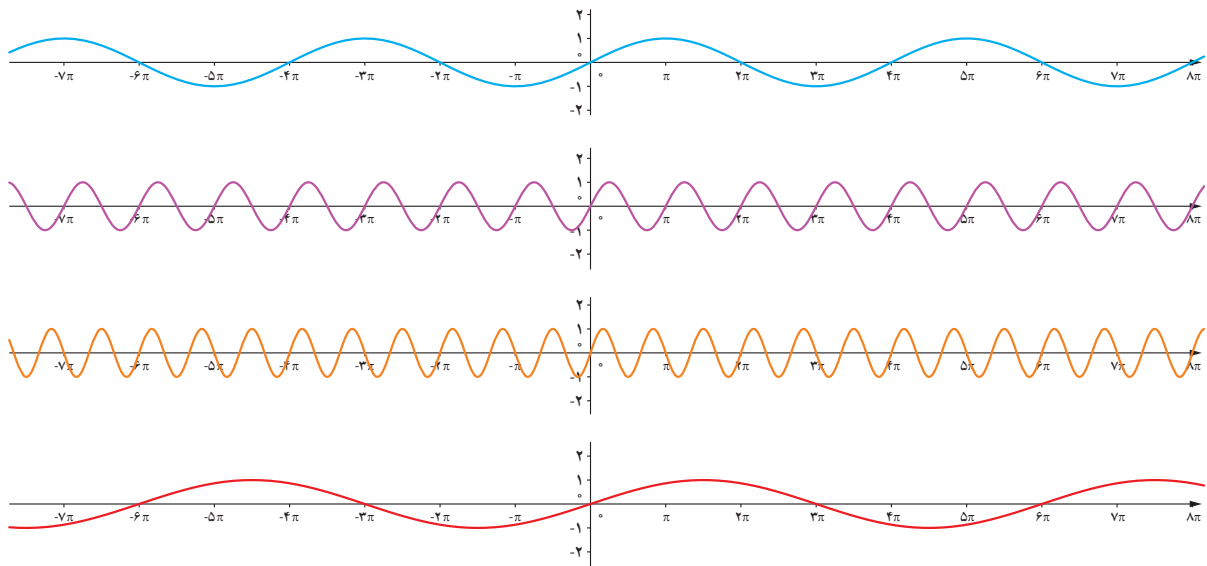
الف)  $g(x) = \cos \sqrt{2}x$  (ب)

الف)  $f(x) = \sin^4 x$

ت)  $s(x) = \sin \pi x$

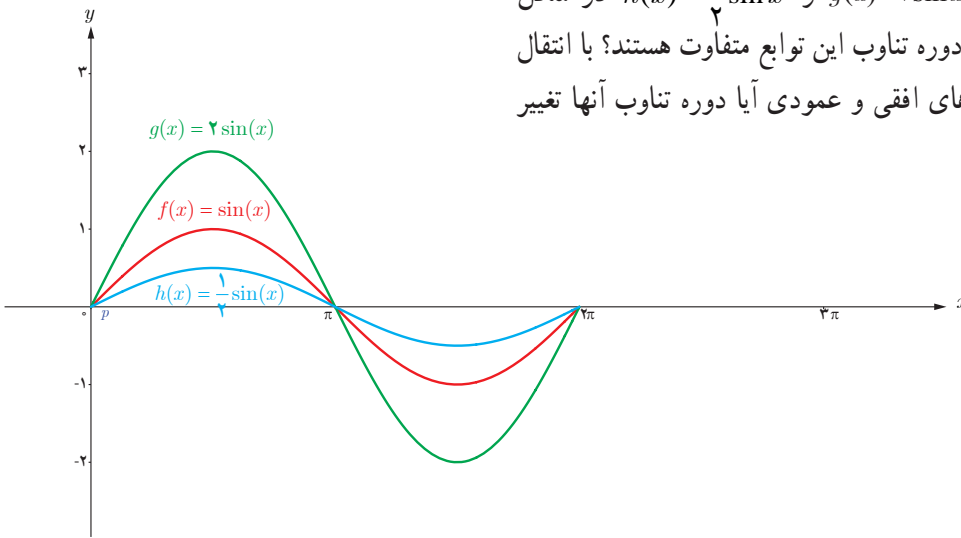
پ)  $h(x) = \sin \frac{x}{2}$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع  $y = \sin x$  به صورت  $x = k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$  می‌باشند. نمودار توابع  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ،  $m(x) = \sin^3 x$ ،  $g(x) = \sin^2 x$  و  $n(x) = -\sin x$  در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های  $y = \sin ax$  چه حدسی می‌زنید؟



۲ با توجه به دوره تناوب تابع  $y = \sin ax$  در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع  $f(x) = \sin x$ ،  $g(x) = 2 \sin x$  و  $h(x) = \frac{1}{3} \sin x$  در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

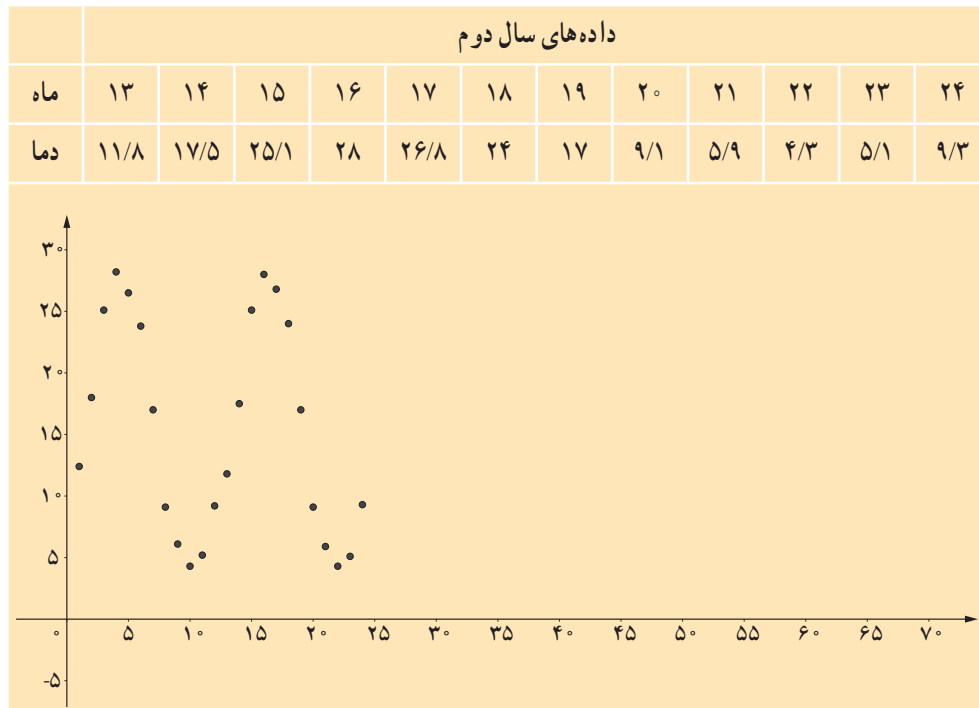
به‌طور کلی توابع مثلثاتی به صورت  $y = a \sin(bx + c) + d$  و  $y = a \cos(bx + c) + d$  که در آنها  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی ( $a, b \neq 0$ ) می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  هستند.

توابع متناوب<sup>۱</sup> برای مدل‌سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

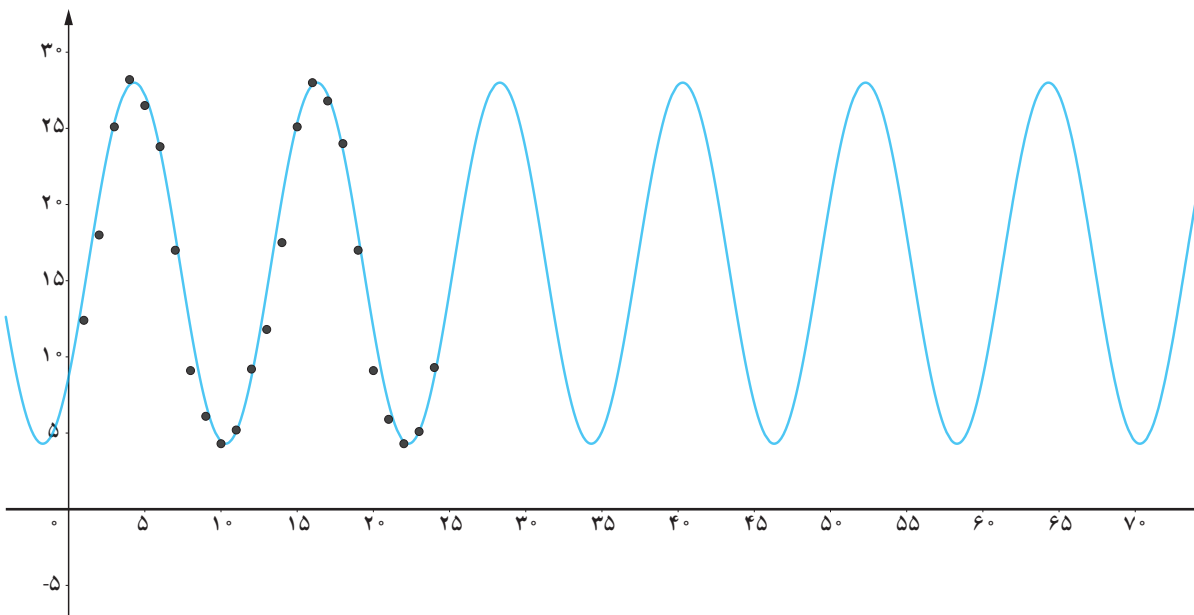
❁ **مثال ۱:** داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده‌اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

		داده‌های سال اول											
ماه		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما		۱۲/۴	۱۸	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۵	۲۳/۸	۱۷	۹/۱	۶/۱	۴/۳	۵/۲	۹/۲

۱- در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.



با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا  $T=12$  است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع  $T(t) = 11/85 \sin(\frac{\pi}{6}t) + 16/15$  را که در آن  $t$  شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش‌بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده‌ها شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به صورت  $T(t) = a \sin(bt) + c$  در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول  $a, b, c$  به صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دوره تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم:

$$\frac{2\pi}{b} = 12 \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

برای به دست آوردن  $a$  که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت:

$$a = \frac{28 - 4/3}{2} = 11/15$$

برای به دست آوردن مقدار  $c$  کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم:

$$c = \frac{28 + 4/3}{2} = 16/15$$

❖ **مثال ۲:** مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به صورت  $y = a \cos(bx) + c$  برای داده مناسب به نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

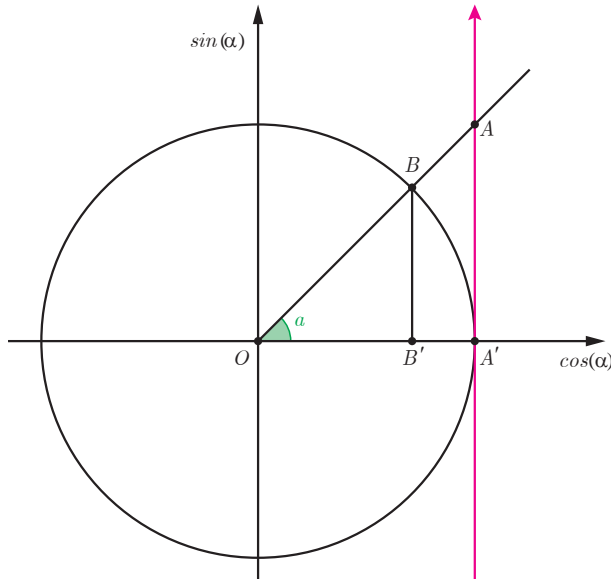
$$\frac{2\pi}{b} = 12 \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

$$a = \frac{28 - 15}{2} = 6/5$$

$$c = \frac{28 + 15}{2} = 21/5$$



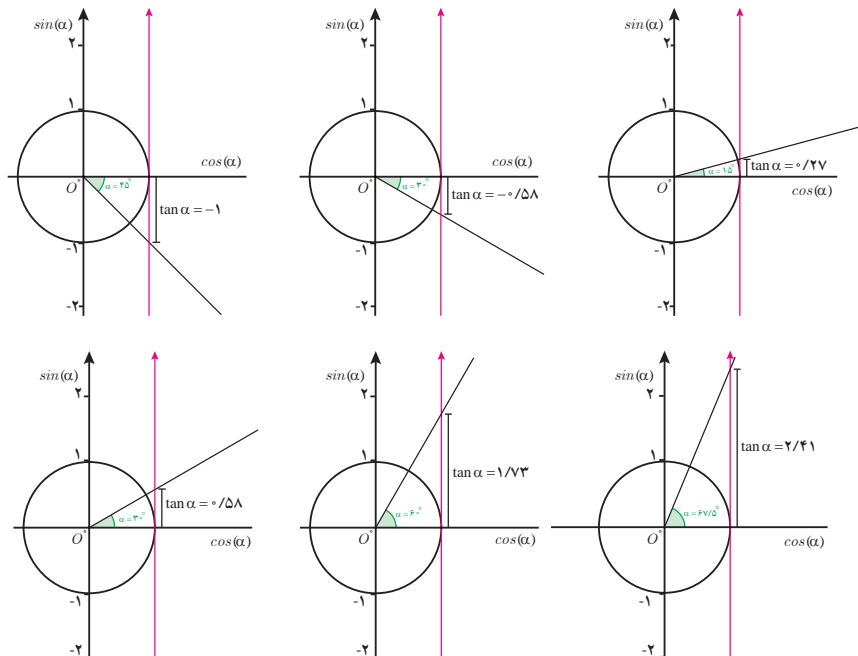
## تابع تانژانت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه  $\alpha$  و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط  $x=1$  را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده رسم کنیم تا امتداد  $OB$  را در نقطه  $A$  قطع کند آن‌گاه اندازه پاره خط  $AA'$  برابر تانژانت زاویه  $\alpha$  می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA' = \frac{BB'}{OB'} = \tan \alpha.$$

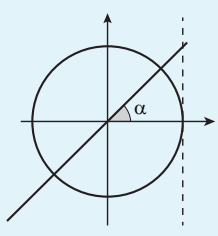
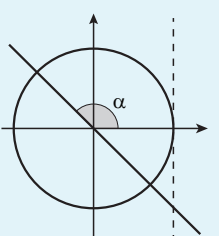
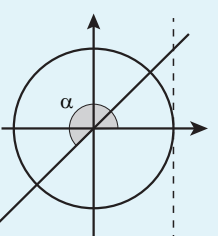
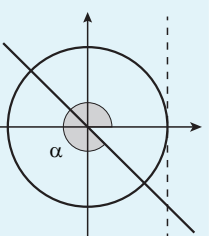
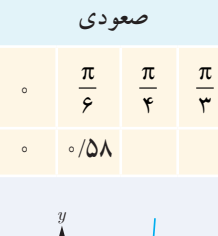
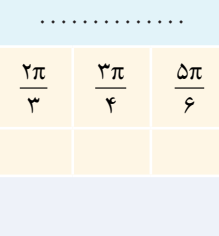
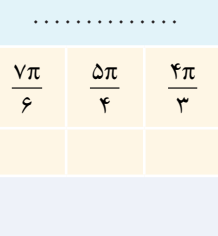
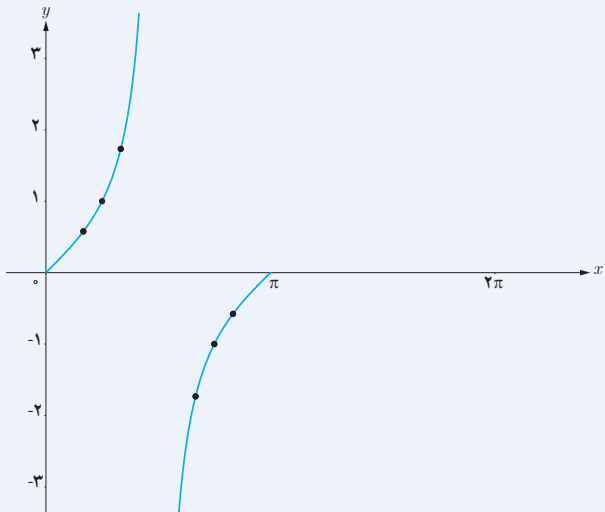
از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه  $\alpha$  در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که زاویه  $\alpha$  به زاویه  $90^\circ$  نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



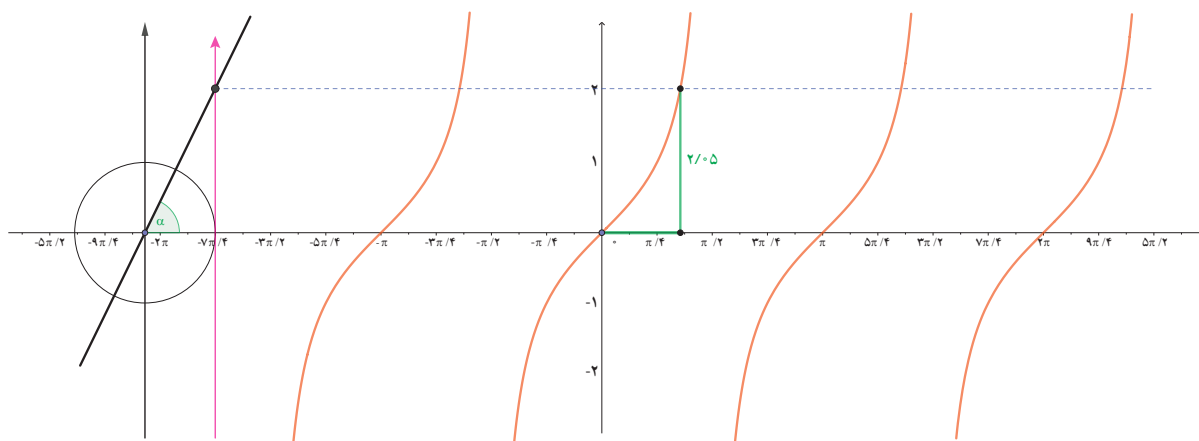
در فعالیت زیر تغییرات تابع  $y = \tan \alpha$  را از  $x = 0$  تا  $x = 2\pi$  به کمک محور تناژت و نیز جدول مقادیر تناژت که از سال‌های قبل فراگرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تناژت را به دست می‌آوریم.

**فعالیت**

- ۱ در ردیف الف از جدول زیر صعودی و نزولی بودن  $\tan \alpha$  را با توجه به محور تناژت در هر بازه تعیین نمایید.
- ۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار  $\tan \alpha$  را به ازای مقادیر داده شده از  $\alpha$  به دست آورید ( $\sqrt{3} \approx 1/7$  ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0/58$ ).
- ۳ در ردیف پ نمودار تابع  $y = \tan \alpha$  را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

$\alpha$	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$							
الف														
ب	°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
	°	۰/۵۸												
پ														

همان‌طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی  $y = \tan \alpha$  برای مقادیر  $x' = \frac{k\pi}{4}$  تعریف می‌شود و نمودار آن در بازه  $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$  به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی را که به موازات محور  $y$ ها (محور سینوس) است، محور تانژانت می‌نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه  $\alpha$  با آن محور بیانگر  $\tan \alpha$  است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



۱ آیا تابع  $y = \tan x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  یکنواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع  $y = \tan x$  را به بازه‌های بزرگ‌تر از  $\pi$  و کوچک‌تر از  $\pi - \pi$  گسترش دهید. آیا تابع  $y = \tan x$  متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع  $y = \tan x$  دامنه و برد این تابع را بیابید.

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x \quad \text{ب)}$$

$$y = 1 + 2 \sin \sqrt{2} x \quad \text{الف)}$$

$$y = -\pi + \sqrt{2} \tan 3x \quad \text{ت)}$$

$$y = -\pi \sin \frac{1}{4} (x - 2) \quad \text{پ)}$$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

$$y = 1 - \cos 2x \quad \text{ب)}$$

$$y = 2 - \cos \frac{1}{4} x \quad \text{ب)}$$

$$y = \sin \pi x \quad \text{الف)}$$

$$y = \tan \frac{1}{4} x \quad \text{ج)}$$

$$y = \sin 2x \quad \text{ث)}$$

$$y = -\frac{1}{4} \tan 2x \quad \text{ت)}$$

