فصل ۳

حد و مشتق

درس اوّل
حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس دوم
آشنایی با مفهوم مشتق

درس سوم
مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس اوّل

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

حد توابع کسری

بنابر قضیه‌ای از سال قبل می‌دانیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مثل a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m \neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است. به عبارت دیگر با شرایط این قضیه، حد خارج قسمت دو تابع برابر است با خارج قسمت حدهای آنها.

مثال :

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x+۱}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

همچنین، ملاحظه کردیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر در نقطه‌ای مثل a هم حد صورت و هم حد مخرج هر دو برابر صفر باشند، در این صورت با حالت $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم و دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a)=۰$ و $g(a)=۰$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+x-۲}$ را محاسبه کنید.

حل : صورت و مخرج کسر به ازای $x=۱$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}=\frac{۱+۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۳}$$

مثال : حد تابع $f(x)=\frac{۲x^{۳}+۳x^{۲}+۴}{x^{۳}+۸}$ را در نقطهٔ $x=-۲$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج در -۲ برابر صفرند. باید عامل $(x+۲)$ را در صورت و مخرج ایجاد کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعبات دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اوّل تجزیه کنیم. اما شاید تجزیه صورت قدری دشوارتر باشد. به همین دلیل صورت را بر $(x+۲)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{۲x^{۳}}+۳x^{۲}+۴ & x+۲ \\ \cline{2-2}
-(\cancel{۲x^{۳}}+۴x^{۲}) & ۲x^{۲}-x+۲ \\ \cline{1-1}
\cancel{-x^{۲}}+۴ & \\
-(\cancel{-x^{۲}}-۲x) & \\ \cline{1-1}
\cancel{۲x}+\cancel{۴} & \\
-(\cancel{۲x}+\cancel{۴}) & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}$$

با توجه به تقسیم صفحه قبل می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$.

بنابراین :
$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ایجاد شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، قادر باشیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x)=\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ $x=5$ به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج برابر صفرند. صورت و مخرج را در مزدوج صورت یعنی $2+\sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ به دست آورید.

حل : باز هم با حالت $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم. صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 8} h(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{4x^2-4x+1}$

پ) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$

ت) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

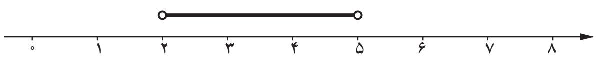
ج) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2-3x+2}$

حد نامتناهی

توابعی وجود دارند که در نزدیکی یک نقطه مثل a، مقدارشان از هر عدد دلخواهی می‌تواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، حد آنها در a، بی‌نهایت می‌شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

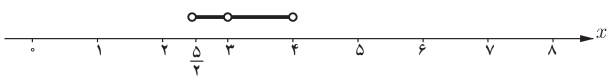
همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی از $x_۰$ می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_۰ \in (a\,,b)$ آنگاه بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی از $x_۰$ می‌باشد.

مثال : بازهٔ $(۵\,,۲)$ یک همسایگی از ۳ است. آیا بازهٔ $(۴\,,۰)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف : اگر بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی از عدد حقیقی $x_۰$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,b)-\{x_۰\}$ یک همسایگی محذوف از $x_۰$ نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲}\,,۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف از ۳ می‌باشد.



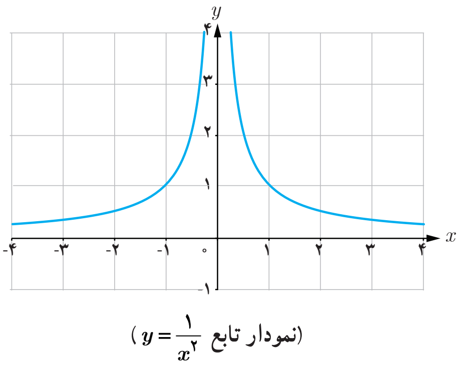
همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_۰\,,x_۰+r)$ یک همسایگی راست از $x_۰$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_۰-r\,,x_۰)$ را یک همسایگی چپ از $x_۰$ می‌نامیم.

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$. با تکمیل جدول زیر، برخی مقادیر تابع را در نزدیک صفر به‌دست آورید.

x	$-۰/۲$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	$\to ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۰۱$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۲$
$f(x)=\frac{۱}{x^۲}$	۲۵	۱۰۰	...	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	...	۱۰۰۰۰۰۰	...	...	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به ۰ نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به ۰ نزدیک می‌شود، اما مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، بزرگ، بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. در واقع با دقت در نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به ۰ نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین مقدارهای $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال برای توصیف بهتر رفتار این تابع در همسایگی صفر، ترجیح می‌دهیم از نماد $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$ استفاده کنیم.



(نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$)

تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty$ صرفاً بر حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^{۲}}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به ۰ نزدیک کرده باشیم. در حالت کلی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

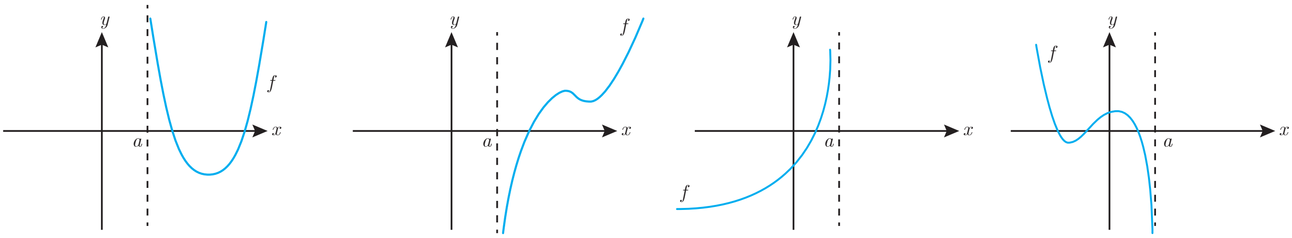
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ به روش مشابه تعریف می‌شود :

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک .... a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ .... کوچک و منفی کرد (از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد)، مشروط بر آنکه x به قدر .... به a نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی، در شکل‌های زیر دقت کنید.

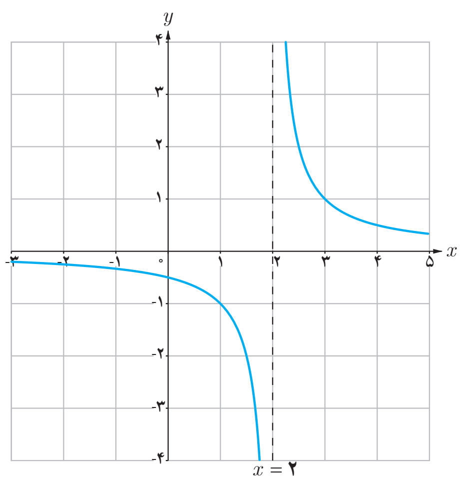


$\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=-\infty$

مثال : حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\frac{۱}{x-۲}$



حل : وقتی $x\to ۲^{+}$ در این صورت مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی مثبت و کوچک خواهد بود. در نتیجه $\frac{۱}{x-۲}$ عددی بزرگ و مثبت می‌شود. بنابراین دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$ به همین ترتیب وقتی $x\to ۲^{-}$، مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی منفی و نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{۱}{x-۲}$ از هر عدد منفی، کوچک‌تر می‌شود. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$.

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=۲$ دقت نمایید.

در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات بیان می‌شود.

قضیه ۱ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ در این صورت

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\dfrac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$ را محاسبه کنید[۱].

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{۱}{۲}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{۱}{۲}$ برابر ۳- است.
پس بنابر قضیه بالا داریم :

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=-\infty$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-}\dfrac{۲x}{x-۵}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+}\dfrac{۲x}{x-۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{-۱}{x^۲}$ ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲}{|x-۳|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}}\dfrac{[x]}{|۳x+۱|}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}$

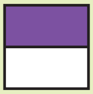
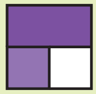
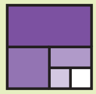
حد در بی‌نهایت

در بخش قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x را به سمت عددی مثل a میل می‌دادیم، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را به دست می‌آوریم.

۱ــ در اینجا حد آن توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشد. بنابراین حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$، $۰\times\infty$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که این مطلب باید در سؤالات ارزشیابی هم مورد توجه باشد.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را مطابق شکل‌های زیر به شیوهٔ خاصی رنگ کنیم. در مرحلهٔ اوّل، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

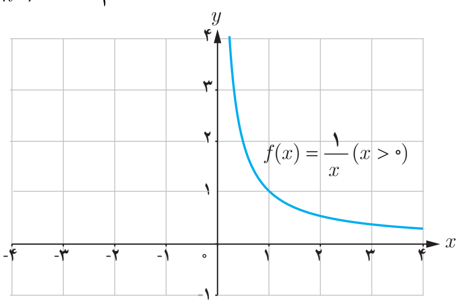
مرحله	۱	۲	۳	۴	۵
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3}$	...	...

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحلهٔ nام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nام چه می‌توان گفت؟

در فعالیت بالا دیدیم که رفتار تابع $f(n)=1-\frac{1}{2^n}$ به ازای nهای بزرگ مدنظر است. به عبارت دیگر مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})$ مورد نظر می‌باشد. به طور شهودی می‌توان گفت که اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، پس از n مرحله تقریباً تمام سطح مربع رنگ می‌شود. به عبارت دیگر $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$.



حال تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازهٔ $(0\,,+\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\to+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\to 0$

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ به عنوان مثال، آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟ در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

به‌طور کلی اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد، عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty\ ,\ b)$ تعریف شده باشد. عبارت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار .... می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر .... کوچک (و منفی) اختیار شود.

مثال : با توجه به جدول زیر و با ملاحظهٔ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۰)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱}{x}=۰$.

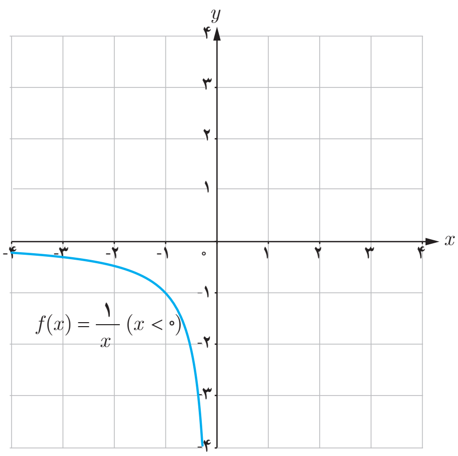
x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰
$f(x)=\dfrac{۱}{x}$	$۰ \leftarrow$	$-۰/۰۰۰۰۰۱$	...	...	$-۰/۰۱$

در مورد حد تابع‌ها در نقطه‌ای مثل a، سال گذشته قواعدی مانند حد مجموع، حد حاصل‌ضرب و... داشتیم که اکثر آنها در حالتی که $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ نیز درست‌اند. علاوه بر آن قضیه زیر هم برقرار است.

قضیه : فرض کنیم r عددی گویا و مثبت باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^r}=۰$

ب) اگر به ازای هر x، x^r تعریف شده باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱}{x^r}=۰$.



مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-۲+\dfrac{۱}{\sqrt{x}})=\lim\limits_{x\to+\infty}(-۲)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}\right)=-۲+۰=-۲$

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲-\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x}}}{\dfrac{۱}{x}+۳}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲-\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x}})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{۱}{x}+۳)}=\dfrac{۲-۰}{۰+۳}=\dfrac{۲}{۳}$

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی $x^۲$ تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان فرض کرد $x^۲\neq۰$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۷x^۲-۴x+۱}{x^۲}}{\frac{۳x^۲+۵x-۶}{x^۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^۲}}{۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^۲}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}(۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^۲})}{\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^۲})}=\frac{۷-۰+۰}{۳+۰-۰}=\frac{۷}{۳}$$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}$

ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۳x-۲}$

ت) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-۱) باشد. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.