

# کاربرد مشتق



آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

??????

????????

درس اول

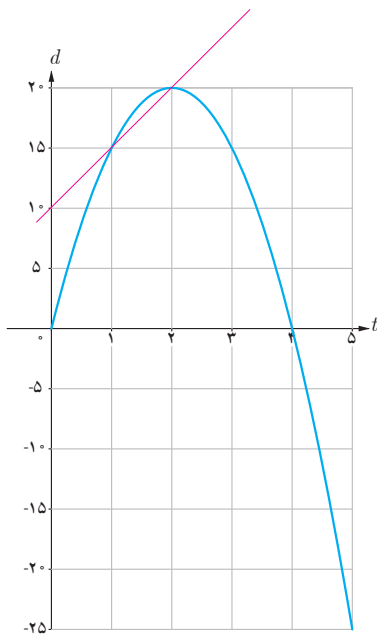
درس دوم

درس سوم

## درس اول

## آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد یک خط راست مسافت  $28^\circ$  کیلومتر را در طی ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در طی این زمان  $\frac{28^\circ}{4} = 7^\circ$  کیلومتر بر ساعت است. با این حال می‌دانید که ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین می‌دانید که سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان-زمان در مورد حرکت یک اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان-زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.



همچنین سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه  $t$ ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه  $t$  همان مقدار مشتق تابع (مکان-زمان) در لحظه  $t$  است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.

مثال: خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله  $d(t) = -5t^2 + 20t$  حرکت می‌کند.

$0 \leq t \leq 5$  با در نظر گرفتن نمودار مکان-زمان:

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی  $[1,2]$ ،  $[1,1/5]$  و  $[1,1/4]$  به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند  $[1,1/3]$  و  $[1,1/2]$  و ... اختیار کنیم،

سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع  $d$  در  $t=1$  به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در  $t=2$  و  $t=3$  چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [1,2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [1,1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{15}{2} = 7.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [1,1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{0.75} = \frac{3/2}{0.75} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

پ)  $d'(t) = -1 \cdot t + 2 \cdot 0$ ,  $d'(1) = 1 \cdot 0$

ت)  $d'(2) = 0$ ,  $d'(3) = -1 \cdot 0$

سرعت در لحظه  $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور  $x$  هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های  $t=1$  و  $t=3$  برابر است ولی علامت منفی در مورد  $f'(2)$  نشان می‌دهد که جهت حرکت در  $t=3$  برخلاف جهت حرکت در  $t=1$  است. به جز مفهوم سرعت در مطالعه، پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییر متغیر وابسته به متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از تغییرات هستند. به طور کلی آهنگ تغییر متوسط یک تابع را در بازه‌ای مانند  $[a, a+h]$  به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

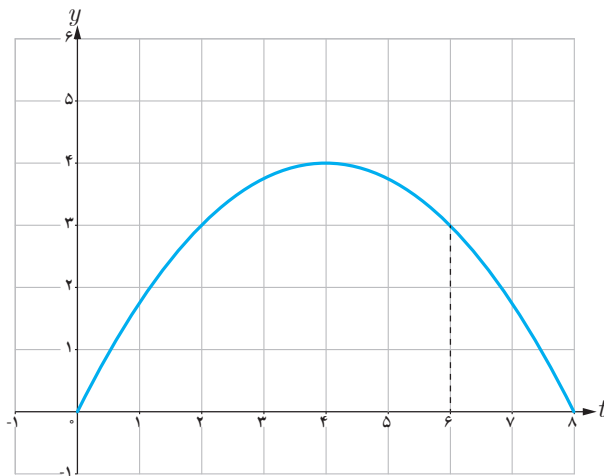
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع و آهنگ تغییر لحظه‌ای با مفهوم مشتق در آن نقطه متناظراند.

کار در کلاس

۱) نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه  $t$  نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:



A سرعت متوسط بین  $t=1$  و  $t=3$

B سرعت متوسط بین  $t=5$  و  $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در  $t=1$

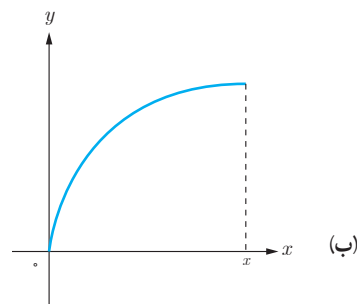
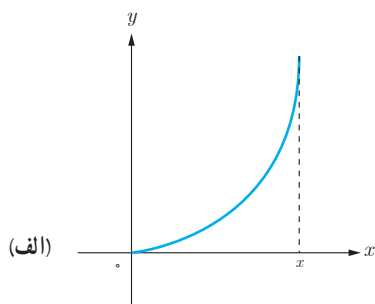
D سرعت لحظه‌ای در  $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در  $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در  $t=6$

۲) کدام یک از نمودارهای داده شده دارای این خاصیت است:

برای همه مقادیر  $x$ ، آهنگ تغییر متوسط روی  $[0, x]$  بزرگ‌تر است از آهنگ تغییر لحظه‌ای در  $x$ .

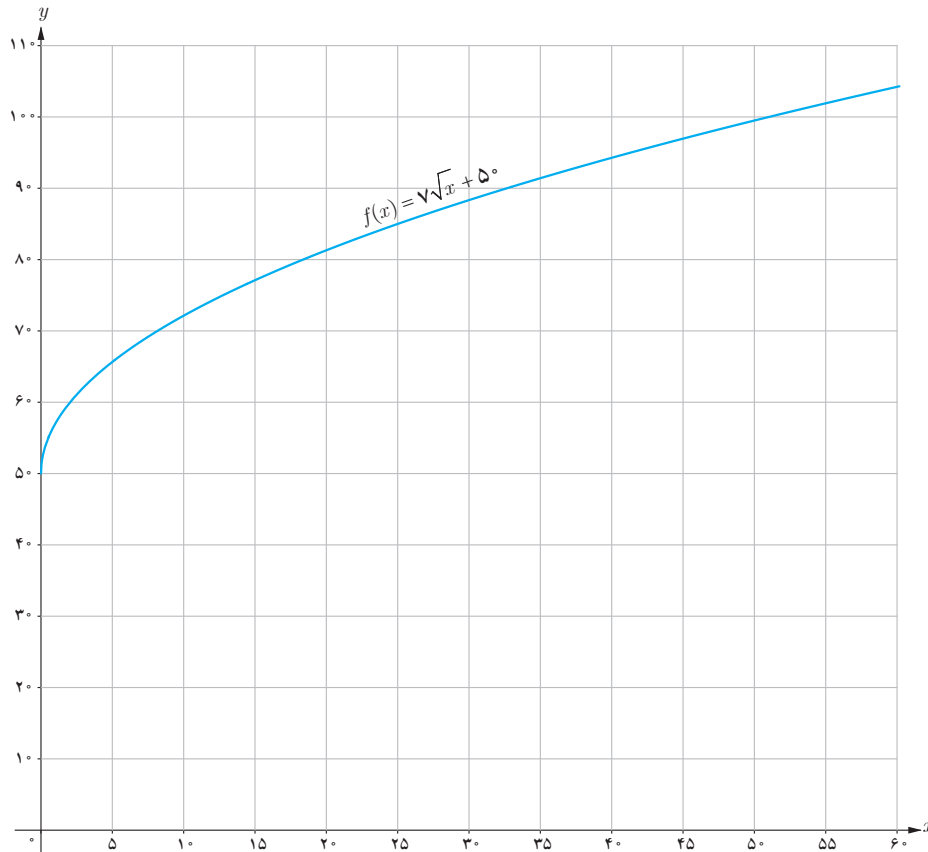


## کاربردهایی دیگر از آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

آهنگ رشد: همان گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع  $f(x) = \sqrt{x} + 50$  قد متوسط کودکان را برحسب سانی متر تا حدود  $60$  ماهگی نشان می‌دهد، که در آن  $x$  تعداد ماه‌های پس از تولد است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 60]$  چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} = \frac{0.9}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال رشد متوسط قد به اندازه  $\frac{9}{10}$  سانتی متر در هر ماه است.



کار در کلاس

(الف) آهنگ رشد متوسط در بازه زمانی  $[0, 25]$  چقدر است؟

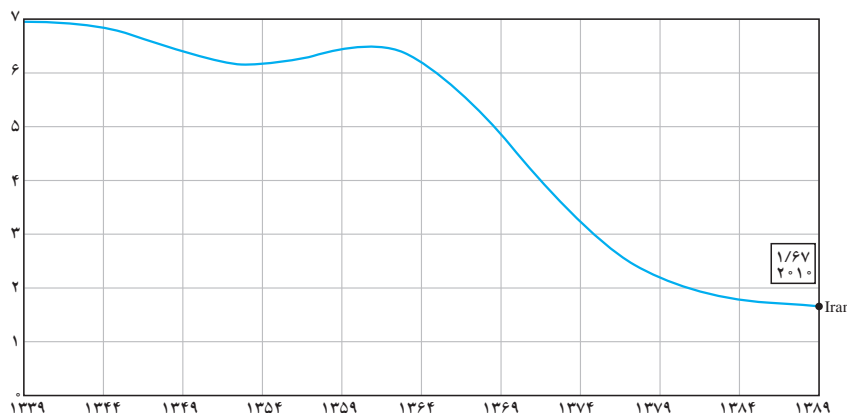
(ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

(پ) اگر علی در ۱۶ ماهگی ۸۰ سانتی متر قد داشته باشد و قد او در ۳۶ ماهگی ۹۵ سانتی متر باشد، آهنگ تغییر متوسط رشد او را با آهنگ تغییر متوسط استاندارد (نمودار بالا) مقایسه کنید.

آهنگ (نرخ) باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد. آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ تغییر متوسط باروری مثبت باشد.



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

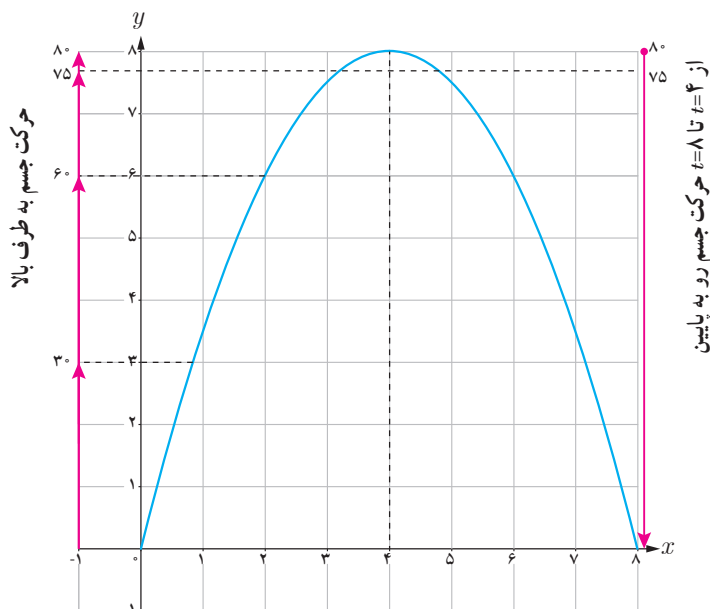
### سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله  $h(t) = -5t^2 + 40t$  به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی  $[0, 2]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  و  $[3, 4]$  به ترتیب با  $v_1$ ,  $v_2$  و  $v_3$  نمایش دهیم داریم:

$v_4$  و  $v_5$  نمایش دهیم داریم:



$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های  $t=1$ ،  $t=2$ ،  $t=3$  و  $t=4$  با استفاده از مشتق تابع  $h$  چنین به دست می‌آید:

$$f(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow f'(t) = -10t + 40$$

$$f'(1) = 30 \text{ m/s} \quad , \quad f'(2) = 20 \text{ m/s} \quad , \quad f'(3) = 10 \text{ m/s} \quad , \quad f'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در  $t=4$  جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین ( $80$  متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس

جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه  $[4, 5]$  برابر  $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$  و سرعت لحظه‌ای در  $t=5$  برابر  $f'(5) = -10 \text{ m/s}$  است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

## کار در کلاس

با توجه به مثال قبل:

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی  $[5, 8]$  به دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم  $35 \text{ m/s}$  و  $-35 \text{ m/s}$  است.

## تمرین

۱) جدول زیر درجه حرارت  $T$  (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ صبح تا ۱۸ عصر در یک روز نشان می‌دهد.

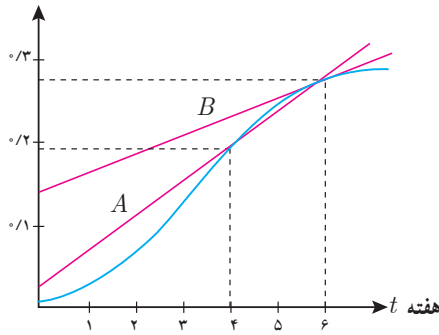
|                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ساعت $h$       | ۸  | ۹  | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ |
| درجه حرارت $T$ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۷ | ۱۹ | ۱۸ | ۱۷ | ۱۵ | ۱۳ | ۱۰ | ۹  |

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

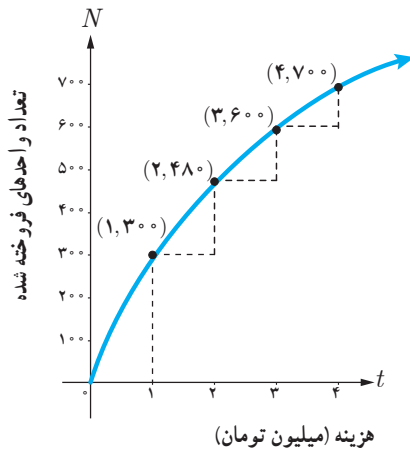
الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۶ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید. پاسخ را چگونه تفسیر می‌کنید.

کسری از جمعیت که آلوده شده‌اند



- ۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.  
 الف) شیب‌های خطوط  $A$  و  $B$  چه چیزهایی را نشان می‌دهند.  
 ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های  $t=1$ ،  $t=2$  یا  $t=3$  بیشتر است؟  
 پ) قسمت  $B$  را برای  $t=4$ ،  $t=5$  و  $t=6$  بررسی کنید.



- ۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا ( $N$ ) پس از صرف  $t$  میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.  
 الف) آهنگ تغییر  $N$  برحسب  $t$  را وقتی  $t$  از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند را به دست آورید.  
 ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات وقتی که مقادیر  $t$  افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

- ۴ معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 1$  برحسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$  (برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند.

- ۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود.  $f(t)$  نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان  $t$  است. برخی از مقادیر  $f(t)$  در جدول زیر نمایش داده شده است.

| $t$    | ثانیه s | ۰  | ۰/۱  | ۰/۲  | ۰/۳  | ۰/۴  | ۰/۵  | ۰/۶  |
|--------|---------|----|------|------|------|------|------|------|
| $f(t)$ | متر m   | ۱۱ | ۱۲/۴ | ۱۳/۸ | ۱۵/۱ | ۱۶/۳ | ۱۷/۴ | ۱۸/۴ |

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

- الف)  $۱/۲۳\text{m/s}$  (ب)  $۱۴/۹۱\text{m/s}$   
 ج)  $۱۱/۵\text{m/s}$  (د)  $۱۶۰۳\text{m/s}$

۶ با توجه به مقادیر داده شده برای تابع  $f$  در جدول زیر،  $f'$  را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال  $f'(0) \approx -6$ . بقیه جدول را کامل کنید.

|                      |     |    |    |    |    |
|----------------------|-----|----|----|----|----|
| $x$                  | ۰   | ۵  | ۱۰ | ۱۵ | ۳۰ |
| $f(x)$               | ۱۰۰ | ۷۰ | ۵۵ | ۴۶ | ۴۰ |
| مقدار تقریبی $f'(x)$ | -۶  |    |    |    |    |

۷ از سه دانش آموز خواسته شد که با استفاده از جدول زیر مقداری تقریبی برای  $f'(4)$  ارائه کنند. راه حل های سه دانش آموز در ادامه داده شده اند.

|        |     |     |     |     |   |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|---|-----|
| $x$    | ۱   | ۲   | ۳   | ۴   | ۵ | ۶   |
| $f(x)$ | ۴/۲ | ۴/۱ | ۴/۲ | ۴/۵ | ۵ | ۵/۷ |

$$f'(4) \approx \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 0/5 \quad \text{دانش آموز اول:}$$

$$f'(4) \approx \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 0/3 \quad \text{دانش آموز دوم:}$$

$$f'(4) \approx \frac{0/5 + 0/3}{2} = 0/4 \quad \text{دانش آموز سوم:}$$

الف) نمودار  $f$  را رسم کنید و نشان دهید که این سه مقدار چگونه روی نمودار مشخص می شوند.  
ب) از نظر شما کدام پاسخ صحیح تر است؟

۸ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

- الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند  $f$  در بازه  $[0, 1]$  همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه صفر است.  
ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن هم، همواره صعودی است.  
پ) نمی توان تابعی را یافت که برای آن هم  $f'(a) = 0$  و هم  $f(a) = 0$

۹ یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

- الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $3 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می یابد؟  
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t=3$  چقدر است؟

۱۰ گنجایش ظرفی  $40$  لیتر مایع است. در لحظه  $t=0$  سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از  $t$  ثانیه از رابطه  $V = 40 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$  به دست آید:

- الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی  $[0, 1]$  چقدر است؟  
ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 10]$  می شود؟