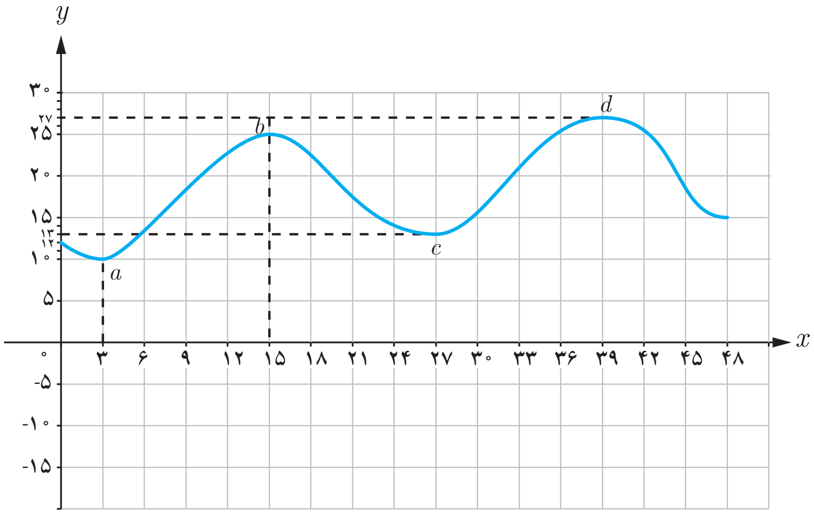
کاربردهای مشتق

فصل ۵

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟



نقاط b و d به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.
نقاط a و c به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر بازه‌ای مانند $I \subseteq D_f$ شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

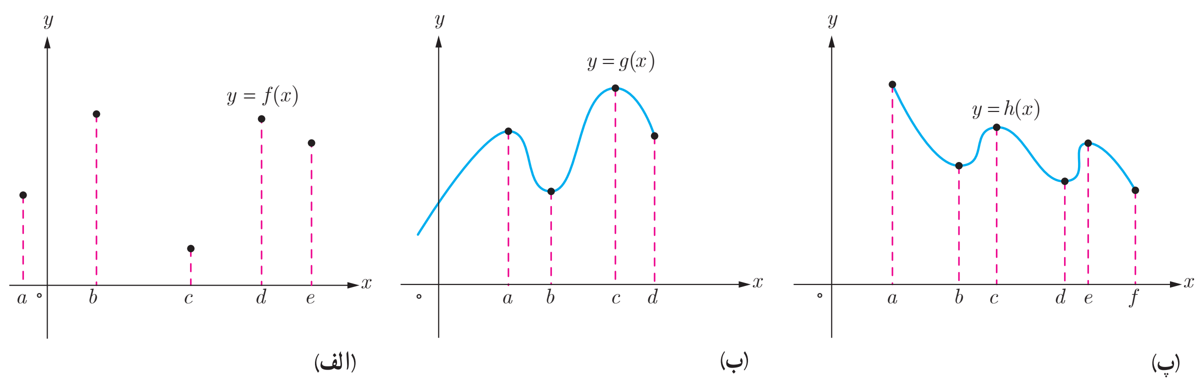
دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵ و ۱۵) و (۲۷ و ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x=15$ و $x=39$ اتفاق افتاده‌اند. مشابه همین مطلب را برای مینیمم‌های نسبی این تابع بیان نمایید.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک بازه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «مینیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن بازه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x=a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x=a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a\,,\,f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر بازهٔ موردنظر است. به عبارتی برای هر $x\in I$ داریم $f(x)\leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x=a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a\,,\,f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر بازهٔ مورد نظر است.

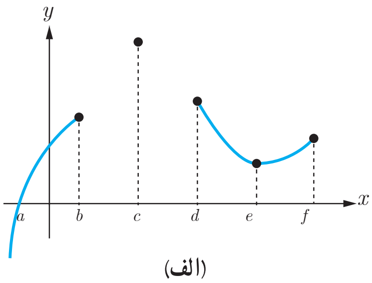
توجه : گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

کار در کلاس

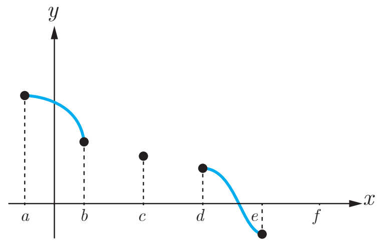
۱ در هر یک از نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



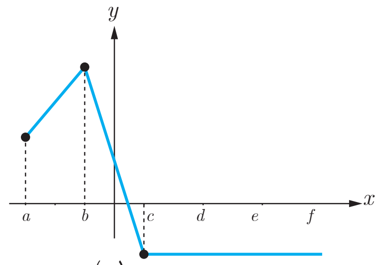
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی اطراف آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



(الف)

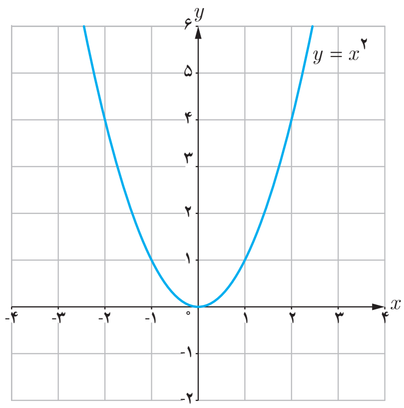


(ب)

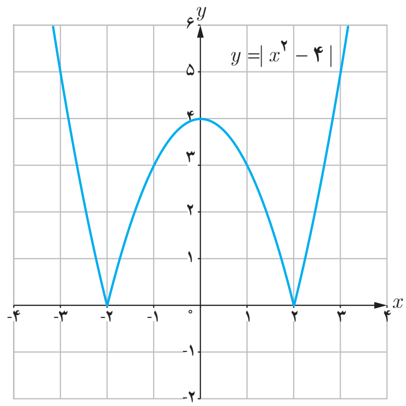


(پ)

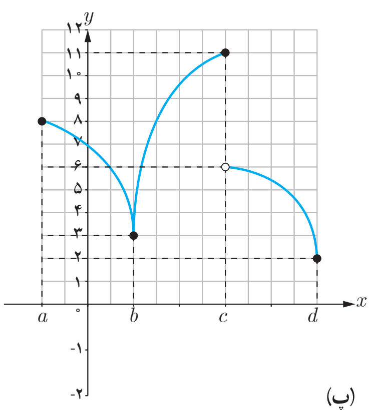
۳ در هر یک از نمودارهای زیر ابتدا مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را و سپس اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.



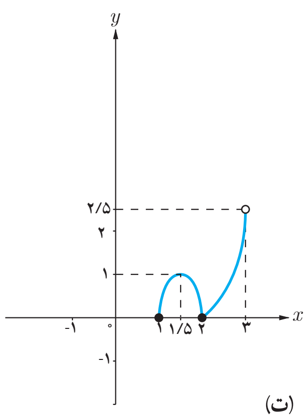
(الف)



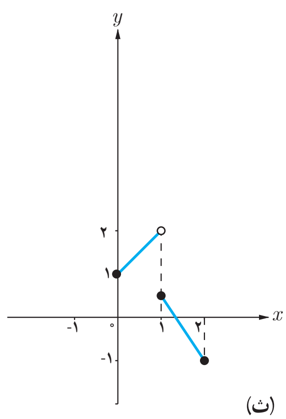
(ب)



(پ)



(ت)



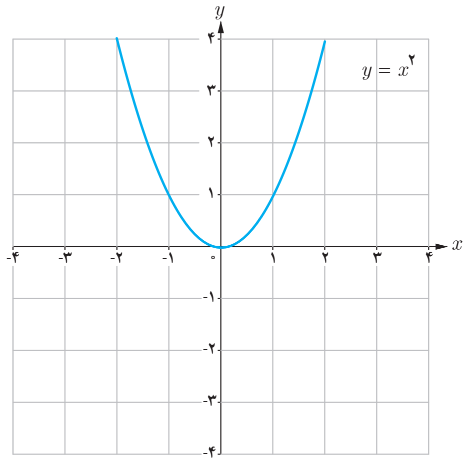
(ث)

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در $(۴ , ۲)$ ماکزیمم نسبی و در $(۲ , ۴)$ مینیمم نسبی دارد.

۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

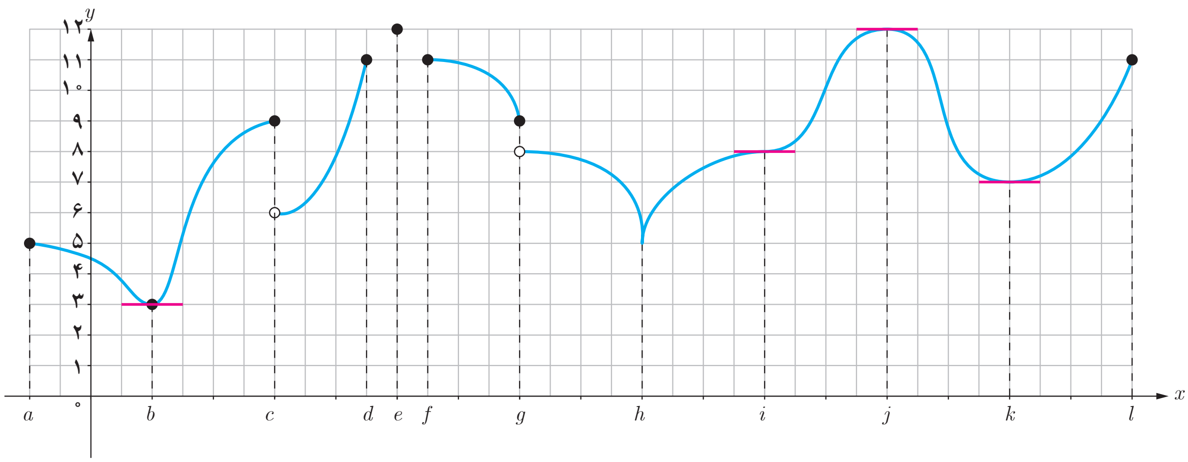
الف) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ مشخص نمایید.



فعالیت

۱ در نمودار زیر تمام جاهایی که مماس افقی وجود دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید.

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چند است؟

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چند است؟

۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

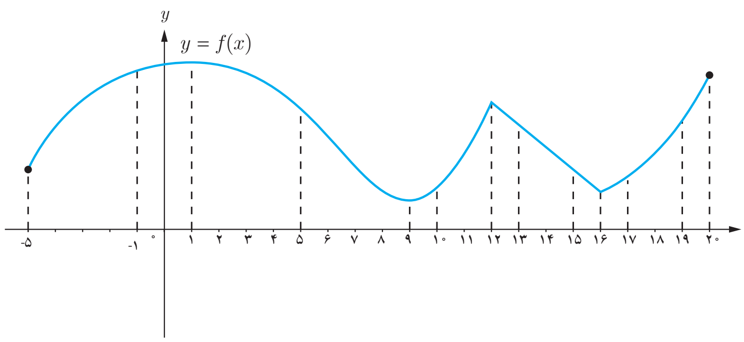
الف) $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است و $f'(c)$ موجود است $\Leftarrow$ $f'(\text{c})=\circ$

ب) $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است $\Rightarrow$ $f'(\text{c})=\circ$

پ) $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم است $\Rightarrow$ $f'(\text{c})$ وجود ندارد.

فعالیت

۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.



الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بستهٔ زیر بررسی کنید.

[−۱ , ۰] ، [۵ , ۱۰] ، [۱۳ , ۱۵] ، [۱۰ , ۱۳] ، [۱۶ , ۲۰]

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

(−۱ , ۰) ، (۵ , ۱۰) ، (۱۳ , ۱۵) ، (۱۰ , ۱۳) ، (۱۶ , ۲۰)

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک مجموعهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است.

ب) هر تابع پیوسته بر یک مجموعهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.

با توجه به آنچه در فعالیت قبل مشاهده کردید، قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه : اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه این تابع در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع یا در «نقاط ابتدا و انتهای بازه» هستند، یا در اکسترمم‌های نسبی تابع و یا در نقاط دیگری که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

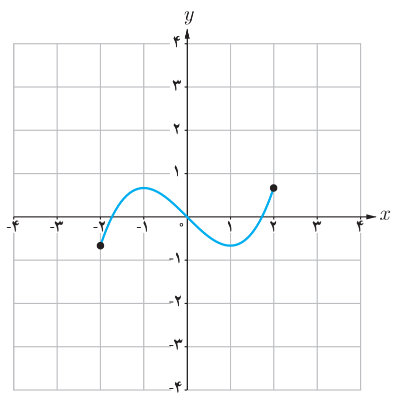
۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم و برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ را در بازهٔ $[-۲\ ,\ ۲]$ بیابید.



حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $(-۲\ ,\ ۲)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\ ,\ ۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و مقدار f' در $x=\pm۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.

بنابراین $x=\pm۱$ طول نقاط بحرانی و $x=\pm۲$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳} \qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳} \qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳} \qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.

مثال : به مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را روی بازه $[-۲\,,\,۲]$ پیدا کنید.

حل : نقاط $x=\pm۲$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

$$f(x)=|x^{۲}-۱|=\begin{cases}x^{۲}-۱ & x\leq -۱ \text{ یا } ۱\leq x\\ ۱-x^{۲} & -۱\leq x\leq ۱\end{cases}$$

و لذا

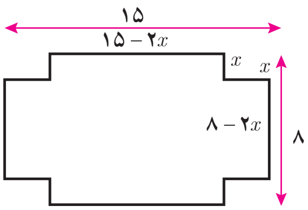
$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x<-۱ \text{ یا } ۱<x\\ -۲x & -۱<x<۱\end{cases}$$

و

$$f'_{+}(۱)=۲ \quad , \quad f'_{-}(۱)=-۲ \quad , \quad f'_{+}(-۱)=۲ \quad , \quad f'_{-}(-۱)=-۲$$

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm۱$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=۰$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=۰$ و $x=\pm۱$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm۱$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm۲$ و مقدار آن برابر ۳ است.

مثال : یک سازنده قوطی حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[1] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، قوطی‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم قوطی‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، مطلوب است محاسبه طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود.



حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\text{طول قوطی مورد نظر} = ۱۵-۲x \qquad ۰\leq x\leq \frac{۱۵}{۲}$$

$$\text{عرض قوطی} = ۸-۲x \qquad ۰\leq x\leq ۴$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^{۳}-۴۶x^{۲}+۱۲۰x \quad , \quad ۰\leq x\leq ۴$$

چون V روی $[۰\,,\,۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق است و داریم :

$$V'(x)=۱۲x^{۲}-۹۲x+۱۲۰=۰$$

$$(۳x-۵)(x-۶)=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x=۶$$

۱ــ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

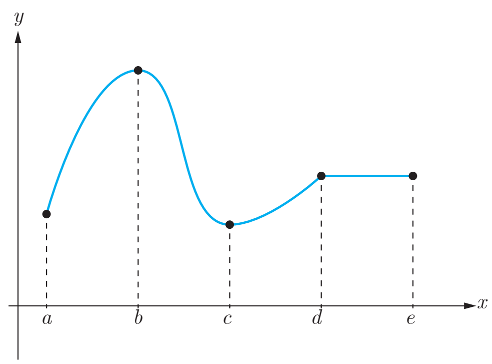
اما $x=6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x=\frac{5}{3}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(0)=0$ ، $V(4)=0$ و (–) نشان می‌دهد که ماکسیمم مطلق تابع در $x=\frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینچ باشد.

تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع بر یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

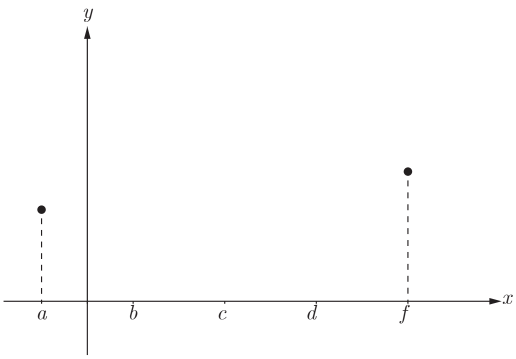
پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.

۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازهٔ $[a\,,f]$ به گونه‌ای بکشید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد:

ــ تابع f در بازهٔ $(a\,,f)$ مشتق‌پذیر باشد.

ــ مقدار مشتق تابع در بازه‌های $(a\,,b)$ و $(b\,,c)$ و $(c\,,d)$ و $(d\,,f)$ به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ــ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.



با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a\,,b]$ پیوسته و بر بازه $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت

الف) اگر به ازای هر x در $(a\,,b)$، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه $(a\,,b)$، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,b]$ یک تابع ثابت است.

کار در کلاس

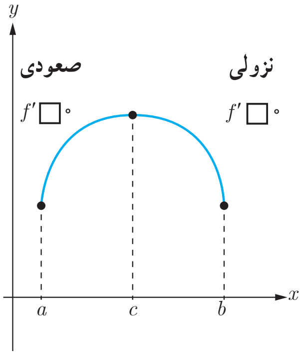
توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

۱ آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

۲ آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

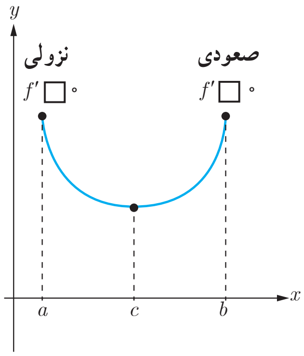
در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم :

فعالیت



فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای شامل نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد.

۱ اگر نقطهٔ $x = c$ یک اکسترمم نسبی f باشد (یعنی مشتق در آن وجود ندارد یا برابر صفر است) و در بازه‌ای مانند (a , c) در سمت چپ آن تابع صعودی و در بازه‌ای مانند (c , b) در سمت راست آن تابع نزولی باشد، در این صورت $x = c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

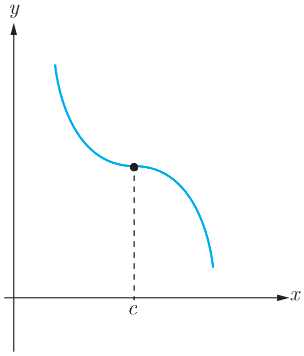


۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

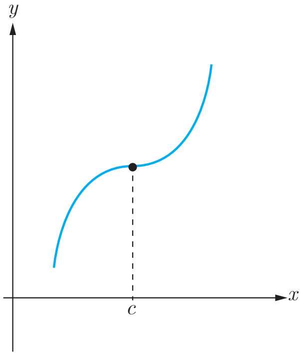
۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c) = ٠$.

الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟



(الف)



(ب)

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند $(a\,, c)$، $f'(x) > ۰$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند $(c\,, b)$، $f'(x) < ۰$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند $(a\,, c)$، $f'(x) < ۰$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند $(c\,, b)$، $f'(x) > ۰$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۶$ را در بازهٔ $[-۳\,, ۴]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل : از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴x - ۴ \qquad f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۲}{۳}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = ۲$ و $x = -\frac{۲}{۳}$ است و نقاط $x = -۳$ و $x = ۴$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم :

$$(-۳\,, -۲۷)\ ,\ \left(-\frac{۲}{۳}\,, \frac{۲۰۲}{۲۷}\right)\ ,\ (۲\,, -۲)\ ,\ (۴\,, ۲۲)$$

لذا نقاط $x = ۴$ و $x = -۳$ به ترتیب نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم :

x		$-\frac{۲}{۳}$		۲	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}\,,\,۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر ۲− است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	۳−		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		+	۰	−	۰	+	
f	۲۷−	↗	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	↘	۲−	↗	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

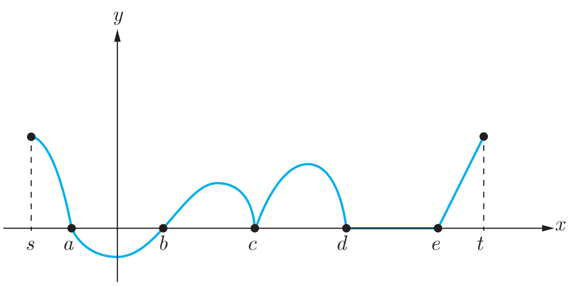
کاردرکلاس

نمودار تابع f' در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

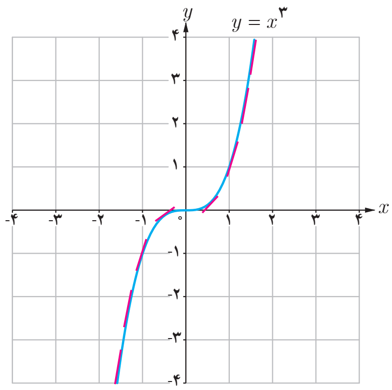
پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟

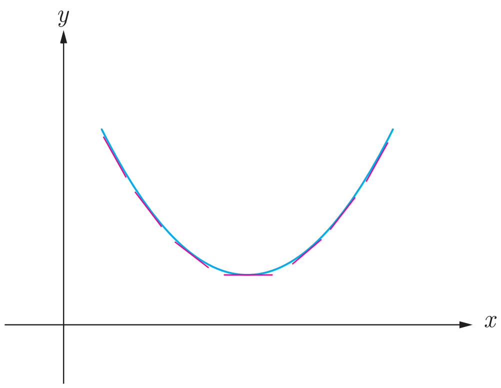


درس ۲

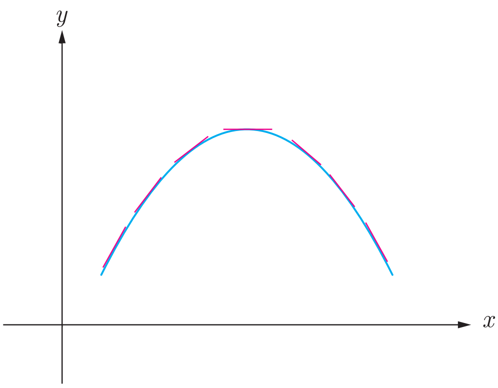
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

با تابع $f(x)=x^{3}$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x)=3x^{2}$ در $x=0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x=0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.





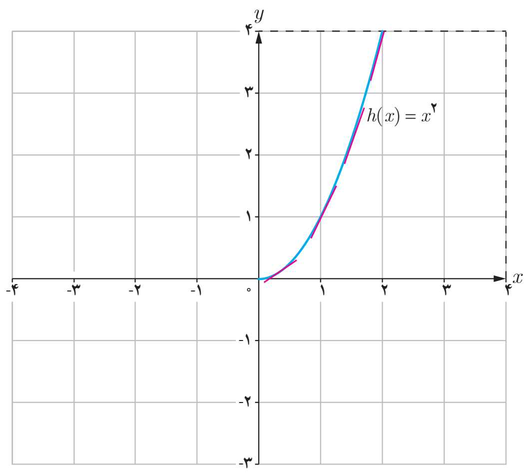
تقعر به سمت بالا است
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.



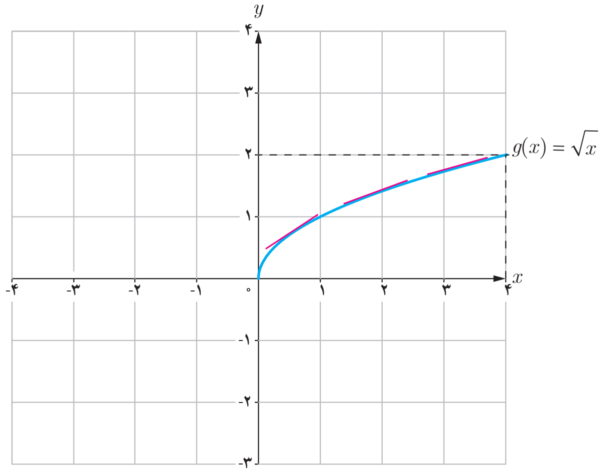
تقعر به سمت پایین است
مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.

فعالیت

۱ نمودارهای دو تابع $h(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0, 1]$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



الف) تقعر رو به بالا است،
مماس‌ها زیر منحنی قرار دارند،
شیب خطوط مماس زیاد می‌شود،
تابع h' صعودی است.



ب) تقعر رو به پایین است،
مماس‌ها بالای منحنی قرار دارند،
شیب خطوط مماس کم می‌شود،
تابع g' نزولی است.

۲ با حرکت از نقطهٔ $x=0$ به سمت نقطهٔ $x=1$ شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

۳ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با شیب خطوط مماس دارد؟

۴ تابع $h'(x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ صعودی است یا نزولی؟

۵ تابع $g'(x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ صعودی است یا نزولی؟

۶

الف) در حالت کلی صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است $\Leftarrow$ تابع f بر بازهٔ I .... است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است $\Leftarrow$ تابع f بر بازهٔ I .... است.

ب) اگر مشتق تابع f' را با f'' نشان دهیم و به آن مشتق دوم تابع f بگوییم در حالت کلی صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است $\Leftarrow$ تابع f' بر بازهٔ I .... است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است $\Leftarrow$ تابع f' بر بازهٔ I .... است.

۷ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید:

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه روبه .... است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه روبه .... است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر آورده شده است و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نمی‌باشد.

قضیه:

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

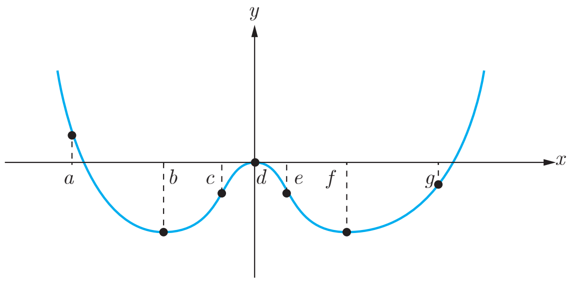
الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آن‌گاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آن‌گاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

کار در کلاس

۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.

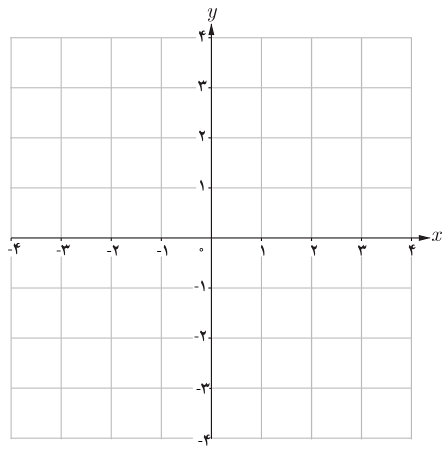


الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را بر بازه‌های مختلف بررسی کنید.

ب) صعودی و نزولی بودن تابع f' را بر بازه‌های مختلف بررسی کنید.

پ) جهت تقعر را در نقاط a، d و g مشخص کنید.

۲ نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :



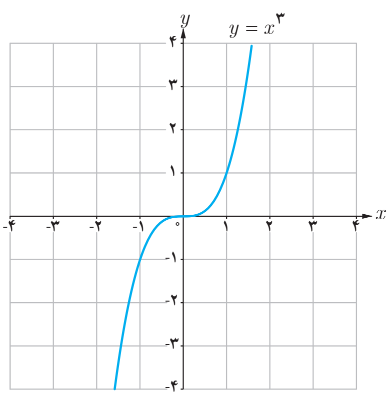
الف) $f(۰) = f(۱) = f(۲) = ۰$

ب) بر بازه $(-\infty , ۱)$، $f''(x) < ۰$

و بر بازه $(۱ , \infty)$، $f''(x) > ۰$.

نقطهٔ عطف نمودار یک تابع

نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty , ۰)$ رو به پایین و در بازهٔ $(۰ , +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = ۰$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = ۰$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

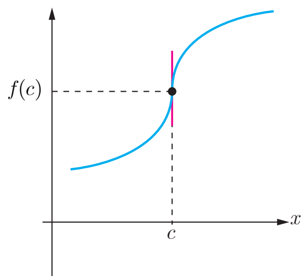


تعریف : فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c , f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c , f(c))$ تغییر کند.

از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.
از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(c\,,\,f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.



خط $x=c$ مماس قائم است.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c\,,\,f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c)=۰$. با این حال شرط $f''(c)=۰$ برای نقطهٔ عطف بودن $x=c$ به تنهایی کافی نیست؛ یعنی می‌توانیم داشته باشیم $f''(c)=۰$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^۴$ را بررسی کنید. داریم :

$$f'(x)=۴x^۳ \qquad , \qquad f''(x)=۱۲x^۲$$

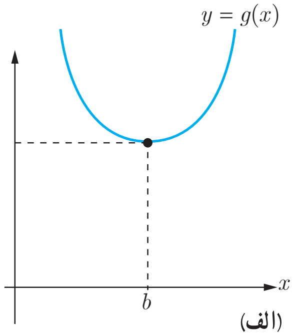
با اینکه $f''(۰)=۰$ اما تابع f'' در دو طرف $x=۰$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=۰$ عوض نمی‌شود و لذا $x=۰$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

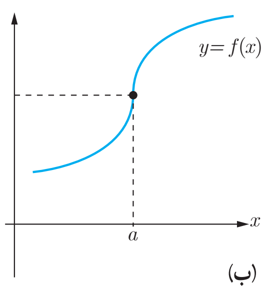
۱ در هر یک از نمودارهای زیر مشخص کنید آیا نقاط داده شده، نقاط عطف هستند یا نه؟

۲ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را مشخص کنید.

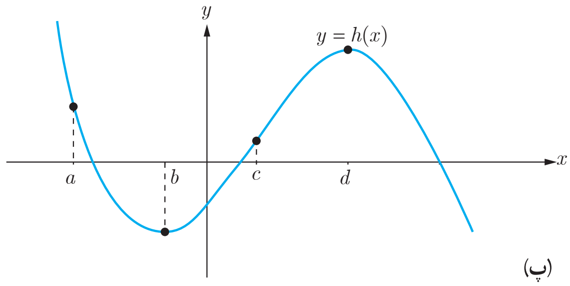
۳ خط مماس را در نقاط عطف رسم کنید.



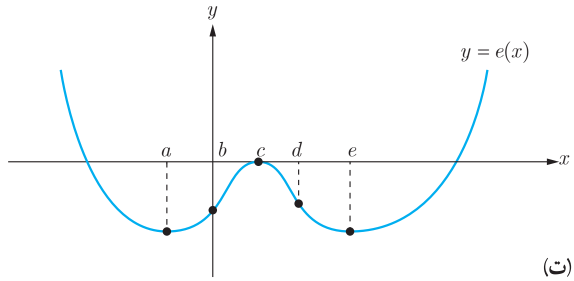
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۴ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است. برای گزینه‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

- در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.
- هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است.
- هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.
- تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.
- تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۵$

ب) $f(x) = x^۴ + ۲x^۳ - ۳۶x^۲ + ۸$

حل :

الف)

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x \quad \text{و} \quad f''(x) = ۶x - ۱۲$$

$$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، همه جا مشتق‌پذیر است و تنها در $x = ۲$ برابر صفر می‌شود. بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x = ۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x = ۲$ تغییر علامت دهد.

اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲ است. از طرفی داریم:

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا
		نقطهٔ عطف	

ب)

$$f''(x) = ۱۲x^۲ + ۱۲x - ۷۲ \qquad f'(x) = ۴x^۳ + ۶x^۲ - ۷۲x$$

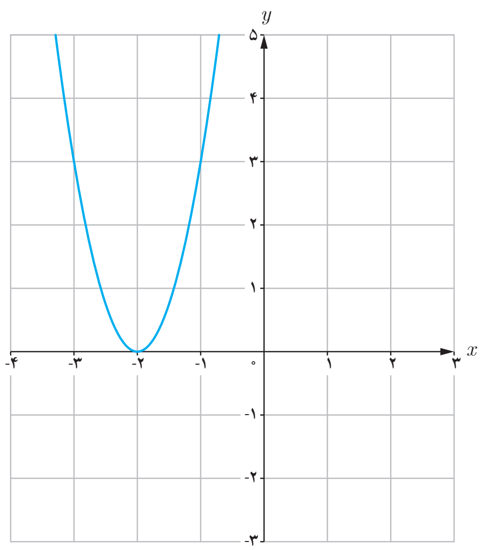
$$f''(x) = ۰ \Rightarrow ۱۲(x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \quad \text{یا} \quad x = ۲$$

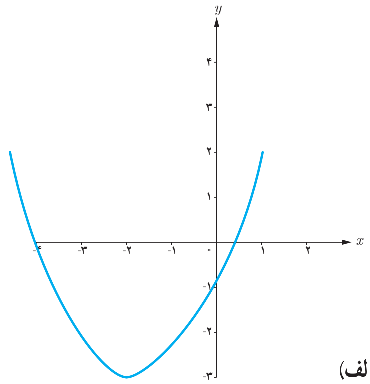
و $f'(-۳) = ۱۶۲$ و $f'(۲) = -۸۸$ موجودند. حال بررسی می‌کنیم که آیا f'' در اطراف این نقاط تغییر علامت می‌دهد یا نه؟

x	$-\infty$		-۳		۲		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		تقعر به سمت بالا		تقعر به سمت پایین		تقعر به سمت پایین	
			نقطهٔ عطف		نقطهٔ عطف		

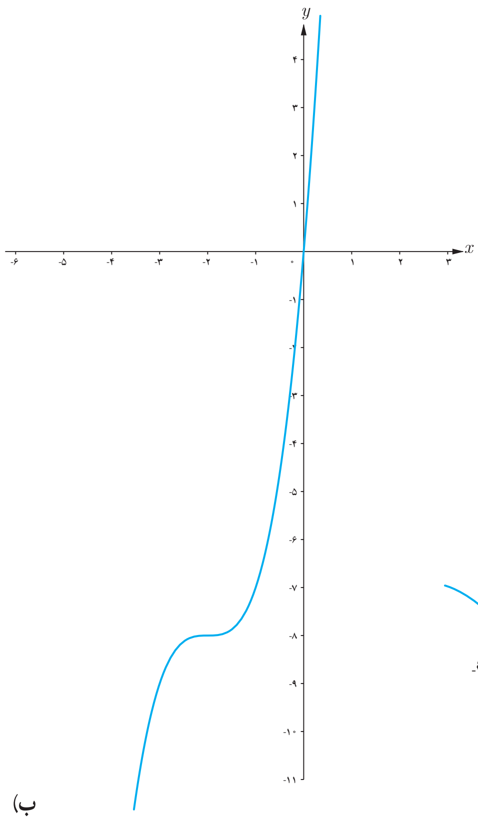
کار در کلاس

۱ اگر شکل روبه‌رو مربوط به نمودار تابع $f'(x)$ باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع $f(x)$ باشد؟

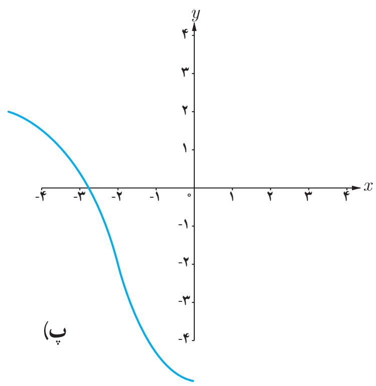




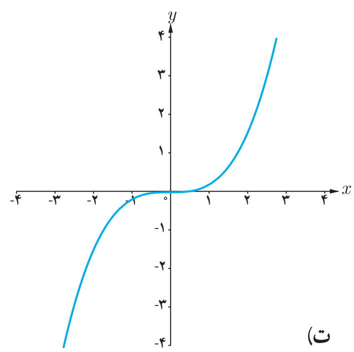
الف)



ب)

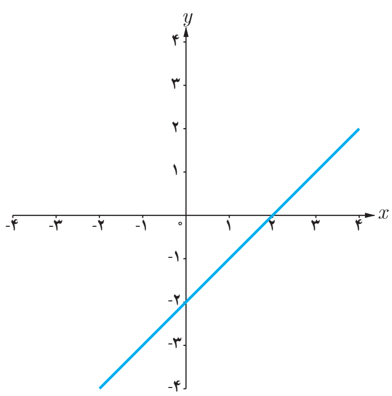


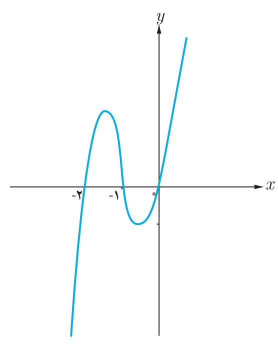
پ)



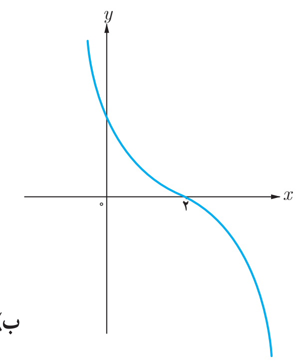
ت)

۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f''(x)$ باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع $f(x)$ باشد؟

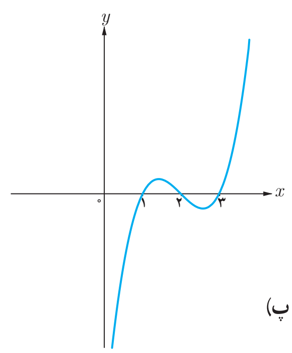




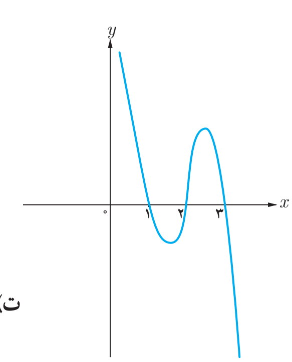
الف)



ب)



پ)



ت)

درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y=f(x)$ و زوج مرتب $(x\,,y)$ یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط $(x\,,y)$ به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال : اگر بدانید تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم :

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x=۱$ و $x=۰$ و $x=-۲$ است و f همه جا مشتق‌پذیر باشد.

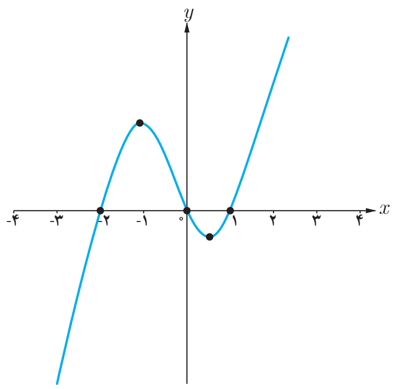
۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=-\frac{۶}{۵}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x=-\frac{۱}{۳}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{۱}{۳}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است. در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حل : از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=-\frac{۶}{۵}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x=-\frac{۶}{۵}$ و $x=\frac{۱}{۲}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x=-\frac{۱}{۳}$ رو به پایین و در سمت راست $x=-\frac{۱}{۳}$ رو به بالاست و چون f' در $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد لذا $x=-\frac{۱}{۳}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		−		−	۰	+		+	
f		↗		↘		↘		↗	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		

با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.



همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را به‌دست می‌آوریم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^{3}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

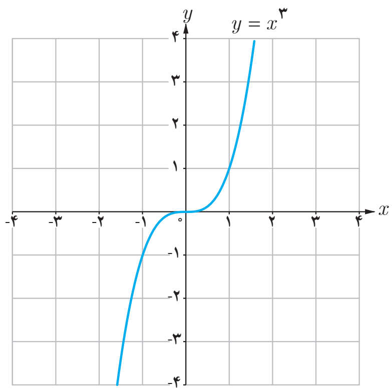
$f(x)=x^{3}=0 \to x=0 \to$ محل برخورد نمودار با محورهای مختصات $(0\,,0)$

$f'(x)=3x^{2}=0 \to x=0$

$f''(x)=6x=0 \to x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+		+
f''	−		+
f	$\nearrow$		$\nearrow$
	تقعر رو به پایین	نقطهٔ عطف	تقعر رو به بالا

این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لذا دو انتهای نمودار در ربع‌های اول و سوم قرار دارند. می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا $(1\,,1)$ و $(-1\,,-1)$ نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y=x^{3}$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.



مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-1)^{2}(x+3)$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$ است محل‌های برخورد با محور xها $(1\,,0)$ و $(-3\,,0)$

$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ محل برخورد با محور yهاست $(0\,,3)$

$f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^{2}=(x-1)(3x+5)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{5}{3} \Rightarrow$ نقاط بحرانی‌اند $(-\frac{5}{3}\,,\frac{256}{9})$ و $(1\,,0)$

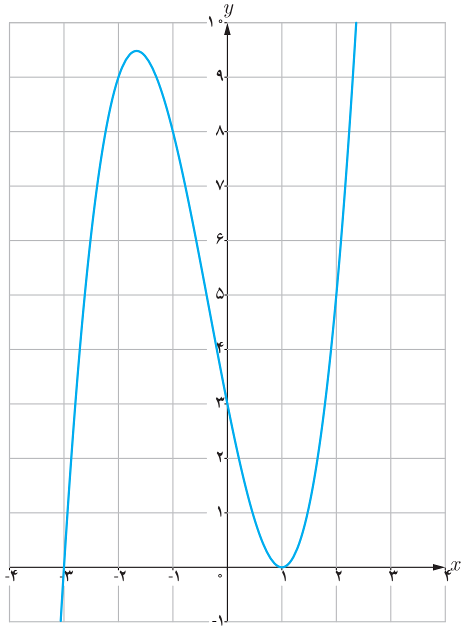
$f''(x)=(3x+5)+3(x-1)=6x+2$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		−		−	۰	+		+	
f		↗		↘		↘		↗	
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل روبه‌رو است.



تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq ۰$ و $d\neq ۰$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

۱) $x\to\pm\infty \quad\Rightarrow\quad y\to\frac{a}{c} \quad\Rightarrow$ $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است

۲) $y\to\pm\infty \quad\Rightarrow\quad x\to-\frac{d}{c} \quad\Rightarrow$ $x=-\frac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

✤ **مثال :** جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.

✤ **حل :** دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است. خط $y=۱$ مجانب افقی و خط $x=۱$ مجانب قائم این تابع است.
همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(۰ , -۲)$ و $(-۲ , ۰)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^{۲}} \quad , \ x\neq ۱$$

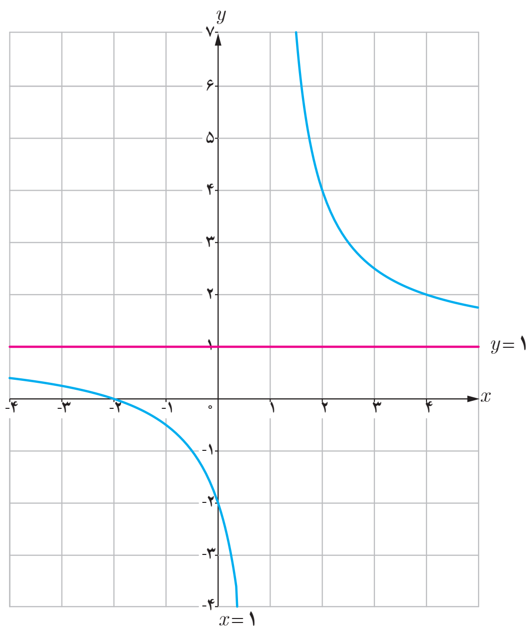
و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty , ۱)$ و $(۱ , +\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x)=\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)^{۴}}=\frac{۶}{(x-۱)^{۳}} \quad , \ x\neq ۱$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , ۱)$ داریم $f''(x)<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(۱ , +\infty)$ داریم $f''(x)>۰$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$	-۲	۰	۱	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	
y	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت پایین	نزولی و تقعر به سمت بالا	
		$(-۲ , ۰)$	$(۰ , -۲)$	∞	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



✤ **مثال :** جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

✤ **حل :** دامنهٔ این تابع $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $\underset{x\to\pm\infty}{y}\to-\frac{۳}{۲}$ ، لذا $y=-\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\underset{x\to\frac{۱}{۲}}{y}\to\pm\infty$ ، لذا $x=\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۰\,,۴)$ و $(-\frac{۴}{۳}\,,۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$f'(x)=\frac{۱۱}{(-۲x+۱)^{۲}} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است.

$$f''(x)=\frac{۴۴}{(-۲x+۱)^{۳}} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ داریم $f''>۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ داریم $f''<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	—	۰	$\frac{۱}{۲}$	
y'	+	+	+	+
y''	+	+	+	−
y	صعودی و تقعر بالا	صعودی و تقعر بالا	صعودی و تقعر بالا	صعودی و تقعر پایین
	$(-\frac{۴}{۳}\,,۰)$	$(۰\,,۴)$	∞	

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.