

## درس ۳

### تابع نمایی

#### فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی – اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده است و تاکنون تولیدات خوبی داشته است. یکی از تولیدات این بنیاد «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درختکاری هدایت نماید. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز داده می‌شود. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌گردد، شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. حال به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱. فکر می‌کنید پس از مرحله ششم، چند امتیاز بازیکن خواهد گرفت؟

برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید:

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
?	۴
۲۴۳	?
$3^6 = 729$	۶
?	?
.	.
.	.
.	.

۲. پس از چند مرحله، میزان امتیازات کسب شده، ۶۵۶۱ خواهد شد؟

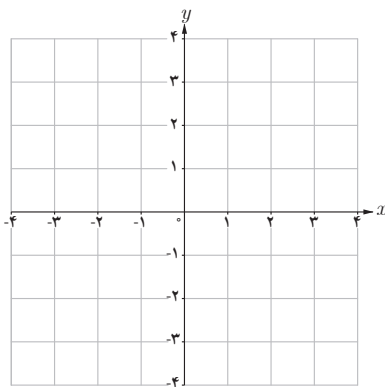
۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، به دست آورید؟

۴. با توجه به رابطه به دست آمده در بند ۳، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله  $n$ ام را به دست آورید؟

## فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریم که به عنوان تابع از ضابطه  $f(n) = 2^n$  پیروی می‌کند. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم:

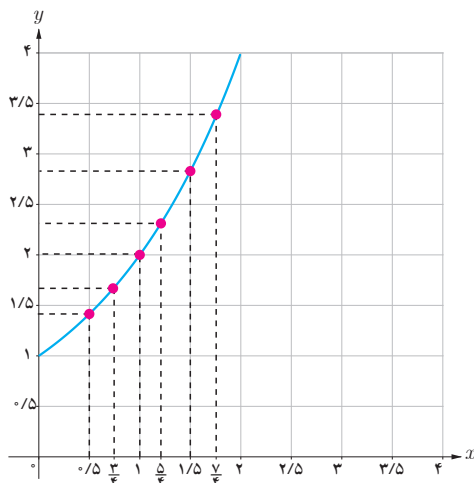
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات زیر نمایش دهید.



۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در صفحه مختصات بالا، نشان دهید:

$x$	$2^x$
$\frac{1}{4}$	$1/189$
$\frac{2}{4}$	$1/414$
$\frac{3}{4}$	$1/681$
$\frac{5}{4}$	$2/378$
$\frac{6}{4}$	$2/828$
$\frac{7}{4}$	$3/363$

۳. اگر مقادیر تابع  $f(x) = 2^x$  را برای  $x$  های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع  $f(x) = 2^x$  به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت  $y = a^x$ ، که  $a$  عددی حقیقی و مخالف یک و مثبت و  $x$  یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می شود.

**تذکر:** حرف  $a$  معرف پایه و حرف  $x$  معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی  $f$  را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

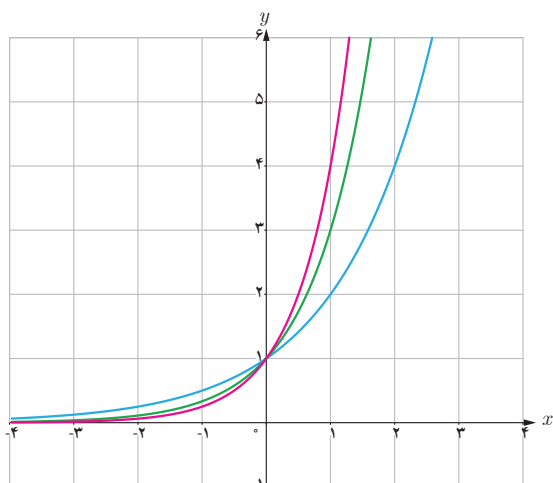
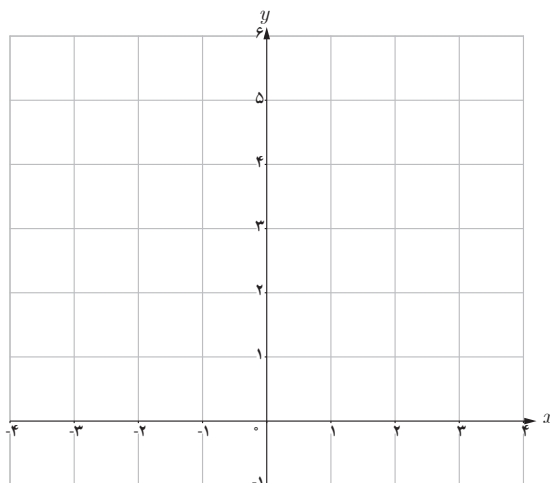
## فعالیت

الف) در فعالیت اول این درس، با تابع نمایی  $y = 3^x$  آشنا شدید. نقاط  $y$  حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید و سپس آنها را به هم وصل کنید.

۱- این تابع به این دلیل نمایی نامیده می شود که متغیر  $x$  در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

$x$	$3^x$	$y$	محاسبه $y$ با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	$3^{-2}$	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{۳}{۲}$	$3^{-\frac{۳}{۲}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	$3^{-1}$	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{۱}{۲}$	$3^{-\frac{۱}{۲}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	$3^0$	۱	۱
$\frac{۱}{۲}$	$3^{\frac{۱}{۲}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	$3^1$	۳	۳
$\frac{۳}{۲}$	$3^{\frac{۳}{۲}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	$3^2$	۹	۹



همان گونه که دیده می‌شود، نمودار تابع  $y = 3^x$  در نقطه یک محور  $y$ ها را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع  $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد  $3^{\frac{۵}{۲}}$  را به دست آورید.

پ) نمودار توابع  $y = 2^x$ ،  $y = 3^x$  و  $y = 4^x$  را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است و سپس تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

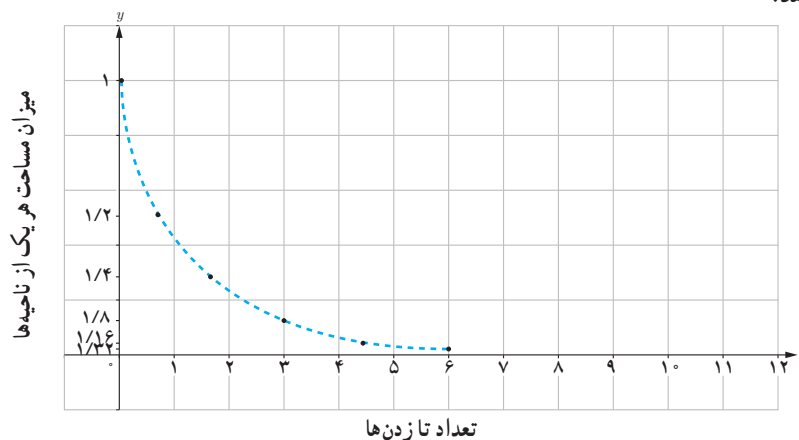
## فعالیت

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. حال دوباره کاغذ تا زده شده را مجدداً یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی  $\frac{1}{4}$  مساحت اولیه است. جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند را نشان می‌دهد.

جدول ۳

تعداد تا زدن‌ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	؟
؟	$\frac{1}{32}$
⋮	⋮
۸	؟
؟	$\frac{1}{1024}$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟ نمودار زیر رابطه بین تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها را نمایش می‌دهد؟



نقطه تقاطع منحنی با محور  $y$  ها، چیست؟

## فعالیت

۱. تابع  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

$x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y$	محاسبه $y$ با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۱/۴	۰/۲۵
$-\frac{3}{2}$			
-۱			
$-\frac{1}{2}$			
۰			
$\frac{1}{2}$			
۱			
$\frac{3}{2}$			
۲			

۲. نقاط به دست آمده در جدول فوق را روی صفحه مختصات به دست آورید و آنها را به هم وصل کنید. آیا می‌توانید نمودار تابع

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$  را برای هر عدد دلخواه  $x$ ، حدس بزنید؟

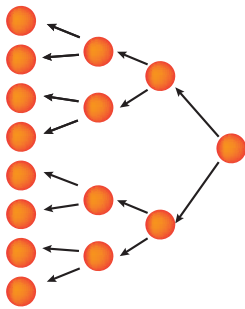
۳. نمودار تابع  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  را با نمودار تابع  $y = 2^x$  که در فعالیت‌های قبلی، آن را رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی

بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

در تابع نمایی  $y = a^x$ ، اگر  $0 < a < 1$  باشد، وقتی که  $x$  بزرگ می‌شود، مقدار  $y$  کم می‌شود و برای  $x$  های کوچک‌تر از صفر، مقدار  $y$  به سرعت افزایش می‌یابد.

**مثال:** در یک صفحه مختصات، نمودار تابع  $f(x) = a^x$  را برای یک  $0 < a < 1$  و یک  $a > 1$ ، رسم نمایید و دو نمودار حاصل را با یکدیگر مقایسه کنید.

### تمرینات مربوط به تابع نمایی



۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنینی انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها، قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب، ماهیچه قلب و... را به وجود آورند. در شکل روبه‌رو، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در ۴ مرحله نشان داده شده است.

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنینی مانند شکل روبه‌رو، ادامه پیدا کند:

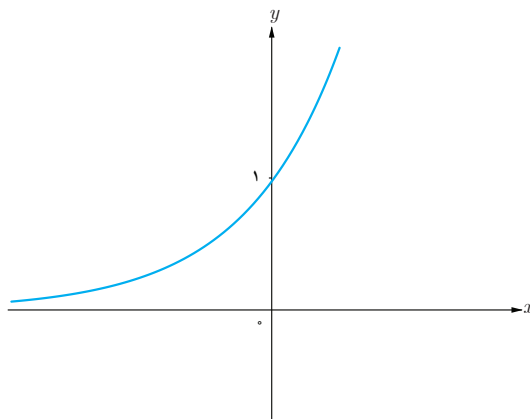
(الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده برابر با  $2 \times 48$  سلول خواهد شد؟

(ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

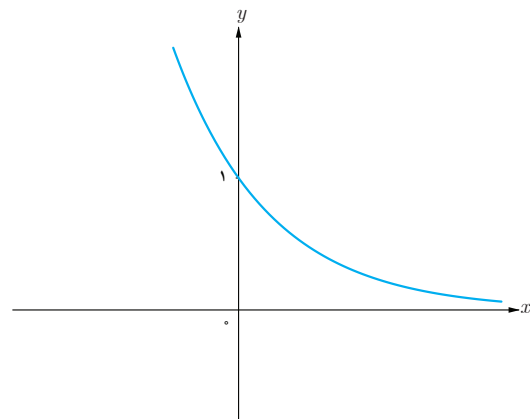
(پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها، مشخص نمایید؟

۲. یک نمونه واقعی (شبيه به تمرین یک) بیان نمایید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. احسان و محسن نمودار تابع  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  را رسم کرده‌اند. کدام یک از آنها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط محسن



نمودار رسم شده توسط احسان

۴. نمودار توابع  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ،  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  و  $\left(\frac{1}{4}\right)^x$  را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم نمایید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را بیان نمایید.

۵. نمودار توابع  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  و  $3^x$  را در یک دستگاه رسم نمایید و سپس آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

## رشد و زوال نمایی

در این قسمت به یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی می‌پردازیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

## فعالیت

پدر احسان قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان جهت استفاده پسرش در آینده که اکنون ۱۷ سال سن دارد، سرمایه‌گذاری کند. با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ از سوی رهبر معظم انقلاب اسلامی، سال «حمایت از کالای ایرانی» نامگذاری شده است، تصمیم گرفت این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. شرکت فوق نیز، در قبال اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی آن، اعلام نموده است که در پایان هر سال، حداقل ۱۴ درصد سود به سرمایه‌گذاران پرداخت خواهد نمود. جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰/۰۰۰/۰۰۰ تومان
۱۸	
۱۹	
⋮	
۲۳	

برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در سن ۱۸ سالگی (یعنی یکسال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10/000/000 + \left( \dots \times \frac{14}{100} \right) = \dots + 1/400/000 = 11/400/000$$

لذا در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم، عدد ۱۱/۴۰۰/۰۰۰ گذاشته شود.

حال به محاسبه سطر سوم جدول بپردازید.

در واقع باید میزان مبلغ سپرده‌گذاری شده در سن ۱۸ سالگی را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده‌گذاری شده



را در سن ۱۹ سالگی (یعنی دو سال پس از سرمایه‌گذاری اولیه) به‌دست آوریم:

$$11/400/000 + \dots = \dots + \dots = \dots$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌فرمایید، میزان موجودی در سن ۱۹ سالگی، به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$10/000/000 \times (1/14)^2 = 11299600$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی در سن ۲۳ سالگی را به‌دست آورید و جدول بالا را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت  $f(t) = c(1+r)^t$  است که در آن  $f(t)$  بیانگر مقدار نهایی،  $c$  بیانگر مقدار اولیه،  $r$  بیانگر میزان رشد (تغییرات) و  $t$  بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه‌گذاری پس از  $t$  سال است، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(t) = 10/000/000 \times (1 + 0/14)^t$$

## کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین، حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین، به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین، چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضعیت جمعیت کره زمین در هر دوره زمانی ۳۵ ساله را مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

## زوال نمایی

اگر مقدار تابع، پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر، تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم  $f(t) = c(1-r)^t$  است که در آن  $f(t)$  بیانگر مقدار نهایی،  $c$  بیانگر مقدار اولیه،  $r$  بیانگر میزان نزول برحسب اعشار و  $t$  بیانگر زمان است.

**مثال:** جمعیت یکی از کشورهای خارجی، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهار میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟  
**حل:** با جایگذاری  $c$ ،  $r$  و  $t$  در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40/000/000 (1 - 0/01)^{18} = 3/338/600$$

## تمرین

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، اشاره به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی داشتیم. اگر یکی از سهامداران این شرکت، در سال ۱۳۹۷، مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری نماید، به سرمایه این سهامدار پس از ده سال چه مبلغی اضافه شده است؟
۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال، چند نفر خواهد شد؟
۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند با گربه‌ها، به مقابله با موش‌ها بپردازند. در آن سال جمعیت موش‌ها، ۲۳۵۷۶ بود که در پی مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال جمعیت گربه‌ها، ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.
  - الف) در یک جدول، میزان جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.
  - ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها، در طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.
  - پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟
  - ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟
  - ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟