

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برای برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. مثلاً می دانیم که $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. حال اگر $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 3^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 3° است. آیا با نصف مقدار $\cos 3^\circ$ می توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی کماکان می شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 3^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.

دایره روبرو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبرو به وتر AC می باشد. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبرو به \widehat{AC} می باشد، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی \hat{A} یک زاویه محاطی روبرو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای \hat{ABC} به دست می آید:

$$\hat{OAC} : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به طور مشابه در \hat{AHC} داریم:

$$\hat{AHC} : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در \hat{OAC} و \hat{AHC} به دست آورده و برابر قرار می دهیم:

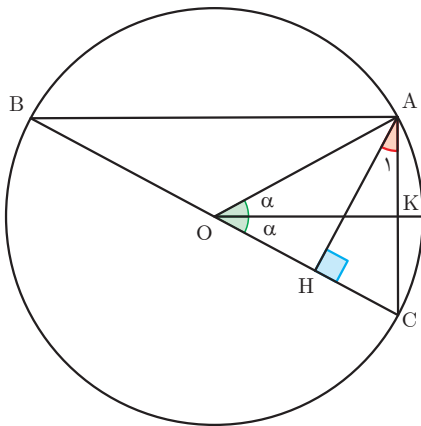
$$\left. \begin{aligned} \hat{OAC} : AH &= \sin 2\alpha \\ \hat{AHC} : \cos \hat{A}_1 &= \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در \hat{OAH} داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در \hat{AHC} داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$



مثال. مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

حل. می‌دانیم که $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

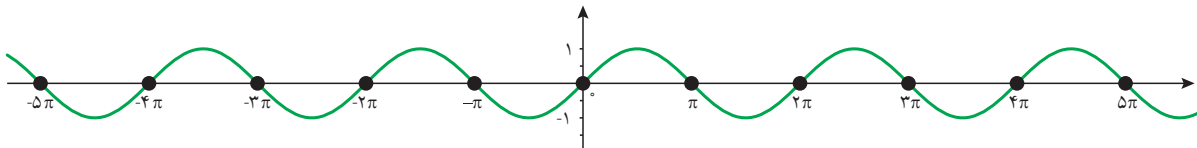
$$\cos 3^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

از طرفی داریم:

$$\sin 3^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})}$$

معادلات مثلثاتی

تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است را در نظر بگیرید.

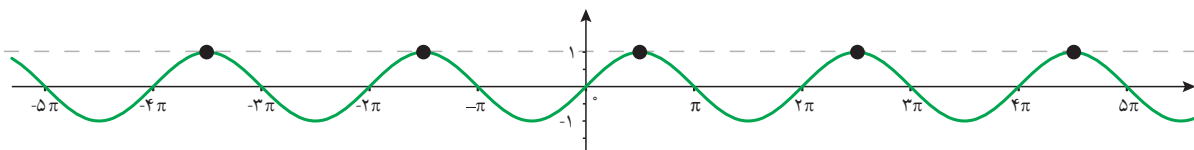


همان‌طور که در نمودار پیداست، ریشه‌های این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت:

$$x = \dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

می‌باشند محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که سینوس آنها برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = \sin x$ و $y = 1$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله فوق به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

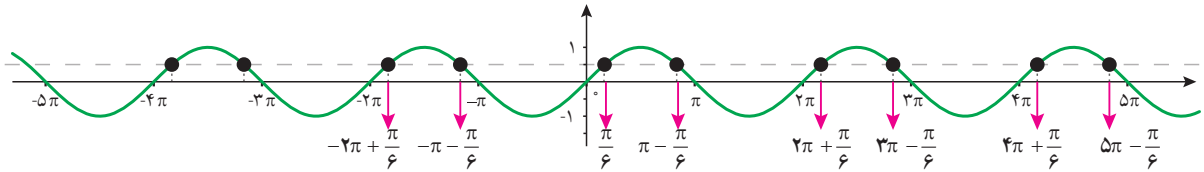
می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ که k یک عدد صحیح است قابل نمایش هستند.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر بگیرید. انجام مراحل زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

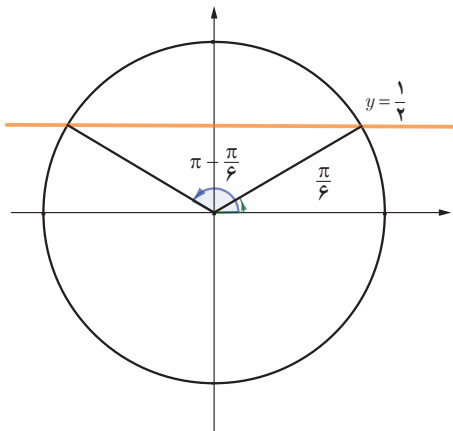
فعالیت

۱ با آزمون و خطا و یادآوری نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که قبلاً فرا گرفته‌اید چند زاویه که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است را حدس بزنید و با جایگذاری در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ درستی حدس خود را بررسی کنید.

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری که حدس زده‌اید را روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟



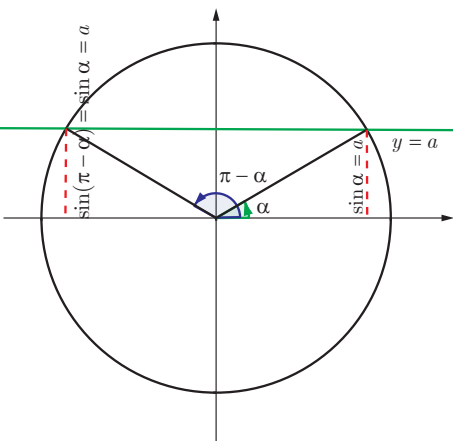
۳ طول نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۴ در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم آنها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم آنها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots$ هم آنها با $\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \dots$ هم آنها با $\pi - \frac{\pi}{6}$



همواره برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های α و x را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad x = (2k+1)\pi - \alpha$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

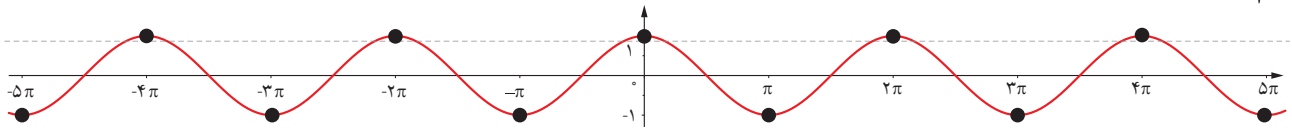
کار در کلاس

۱) معادلات زیر را حل کنید.

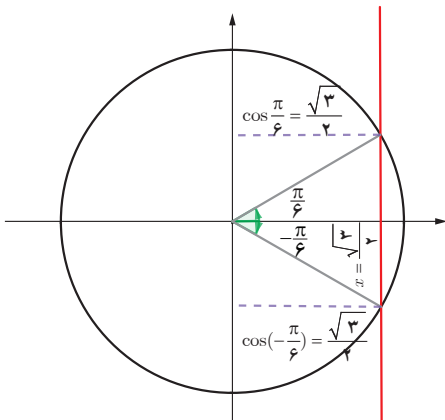
الف) $2\sin x - 1 = 0$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

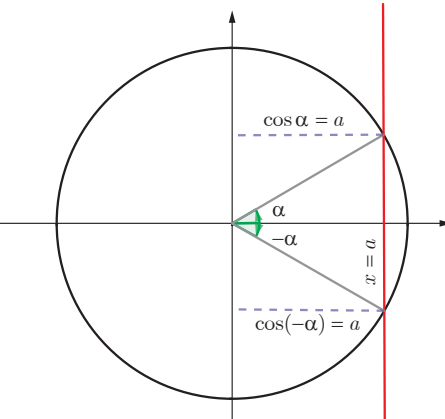
۲) نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.



ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.



برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ معادله $\cos x = a$ برقرار است زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$. بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین کمان‌های x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, \quad x = 2k\pi - \alpha$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال ۱- جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = 1$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند.

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق داریم:

k	x	عضویت در بازه
$k = 0$	$x = 2 \times 0 \times \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} \in [-3\pi, \pi]$
	$x = 2 \times 0 \times \pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} \in [-3\pi, \pi]$
$k = 1$	$x = 2 \times 1 \times \pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$	$2\pi + \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$
	$x = 2 \times 1 \times \pi - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$	$2\pi - \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$
$k = -1$	$x = 2 \times -1 \times \pi + \frac{\pi}{3} = -2\pi + \frac{\pi}{3}$	$-2\pi + \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, \pi]$
	$x = 2 \times -1 \times \pi - \frac{\pi}{3} = -2\pi - \frac{\pi}{3}$	$-2\pi - \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, \pi]$
$k = 2$	$x = 2 \times 2 \times \pi + \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$	$4\pi + \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$
	$x = 2 \times 2 \times \pi - \frac{\pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3}$	$4\pi - \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$
$k = -2$	$x = 2 \times -2 \times \pi + \frac{\pi}{3} = -4\pi + \frac{\pi}{3}$	$-4\pi + \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$
	$x = 2 \times -2 \times \pi - \frac{\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}$	$-4\pi - \frac{\pi}{3} \notin [-3\pi, \pi]$

می‌توان نشان داد که جواب‌هایی از معادله فوق که به ازای مقادیر دیگری از k تولید می‌شوند خارج بازه داده شده می‌باشند. بنابراین نتیجه

می‌شود که جواب‌های $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -2\pi - \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال ۲ — معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.
می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{2k+1}{5}\pi \end{cases}$$

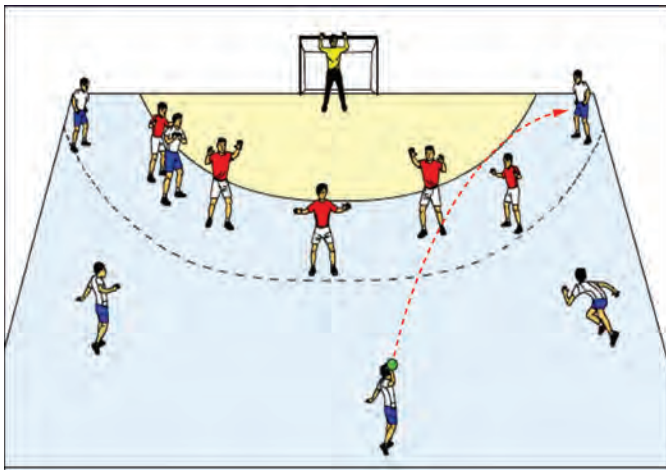
مثال ۳ — معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$



مثال ۴ — یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 12 km/h برای هم‌تیمی خود که در 20° متری او قرار گرفته پرتاب می‌کند (به شکل نگاه کنید). اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2}{32} \sin 2\theta$$

مثال ۵ — جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2\sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۶- معادله $\cos(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ نوشت. جواب های این معادله به صورت $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ به دست می آیند. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = \frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x - 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟