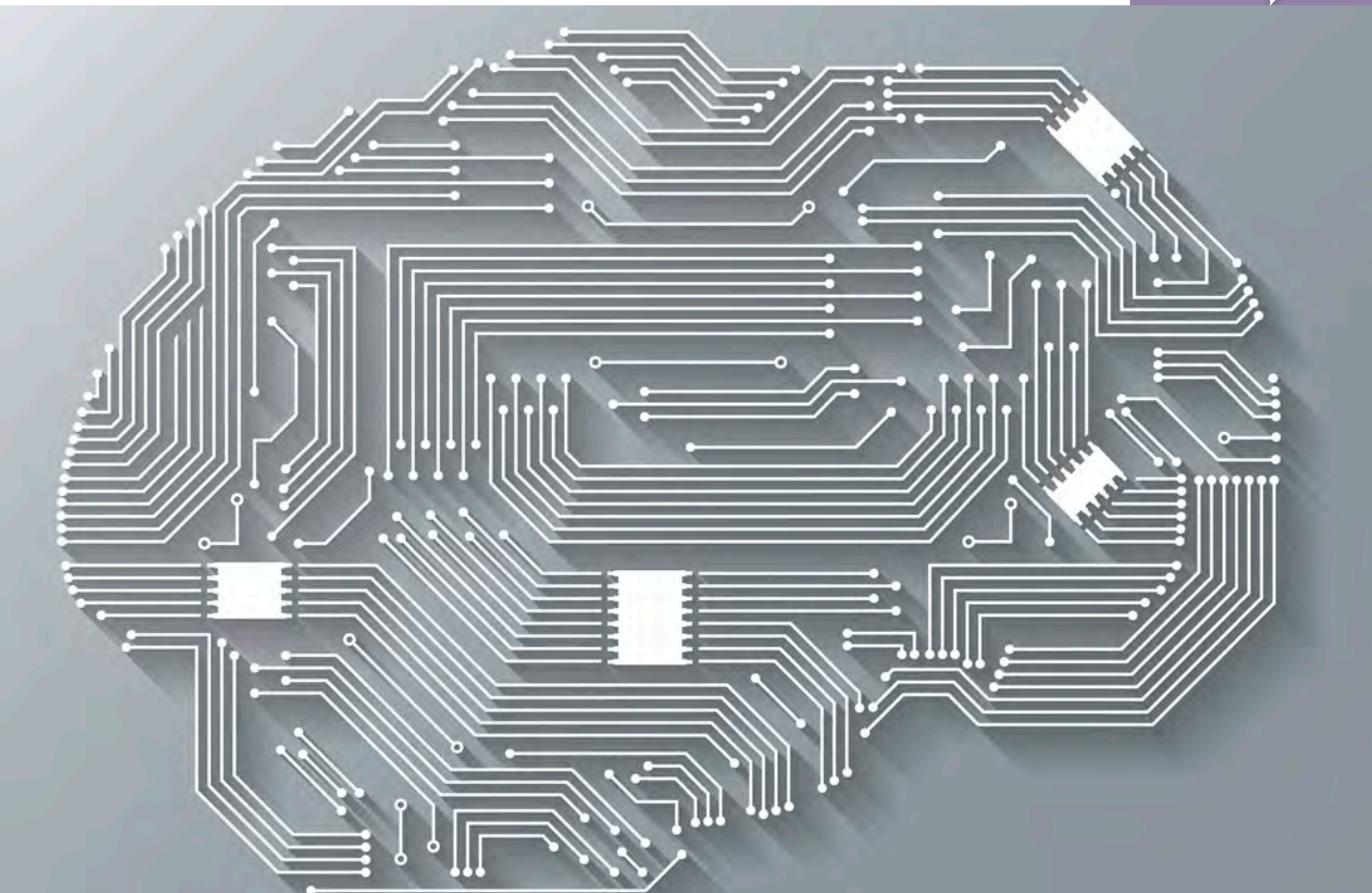
فصل اوّل

ماتریس و کاربـــردها



عکس: ؟؟؟

؟؟؟؟؟

درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول و حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{برد} & \text{باخت} & \text{مساوی} & \text{امتیاز} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰ \\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵ \\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

تعریف: هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A و B و C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \sqrt{۲} \\ ۵ & ۳ & -۷ & ۱ \\ -۳ & ۲۰ & \pi & ۱۴ \end{bmatrix}$$

مثال : این ماتریس، ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (۷−) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم A_{mn} و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m{\times}n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

1– Matrix

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

ماتریس $A_{۲\times۳}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱j} & \cdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲j} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i۱} & b_{i۲} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۰۵–۱۸۶۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کِیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۱۵–۱۸۹۷) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $۱\leq i\leq m$ و $۱\leq j\leq n$ تغییر می‌کنند. همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[۱]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ ماتریسی ۲×۲ باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

حل : $a_{۱۱}=a_{۲۲}=۷$ و $a_{۲۱}=۵$ و $a_{۱۲}=-۲$ پس $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$.

کار در کلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

۱ــ اگر $m=n=۱$ در این صورت ماتریس $[K]_{۱\times۱}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ــ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \text{ و } C=[۵]_{۱\times ۱}$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم.

۲ــ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$$A=[۱\ \ ۲]_{۱\times ۲} \quad , \quad B=[۲\ \ -۱\ \ ۴\ \ ۵]_{۱\times ۴} \quad , \quad C=[۷]_{۱\times ۱}=۷$$

۳ــ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۱} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times ۱} \text{ و } C=[۱۱۴]_{۱\times ۱}=۱۱۴$$

۴ــ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } C=[۲]$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های قطری و اسکالر می‌توان گفت : هر ماتریس .... ماتریسی .... است ولی هر ماتریس .... ممکن است ماتریسی .... نباشد.

۶ــ ماتریس **صفر**، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{cases} , \quad z-۱=۵ \Rightarrow x=۶ , \ y=۳ , \ z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۴×۳ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \ , \ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کاربرد ماتریس‌ها :
یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید : تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

کاردرکلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳&-۱\\۴&۵&۶&-۱\\۷&۸&۹&-۱\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-۱&-۲&-۳&۱\\۱&۲&۳&۴\\۵&۶&۷&۸\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۱+(-۱)&۲+(-۲)&۳+(-۳)&(-۱)+۱\\۴+۱&۵+۲&۶+۳&(-۱)+۴\\۷+۵&۸+۶&۹+۷&(-۱)+۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰&۰\\۵&۷&۹&۳\\۱۲&۱۴&۱۶&۷\end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}$

ب) $A=[۱\ \ -۱\ \ ۳\ \ ۷]\quad,\quad B=[۳\ \ ۲\ \ -۱\ \ ۴]$

پ) $A=\begin{bmatrix}۲&-۱&۳&۲\\\sqrt{۲}&۵&-۱&۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۰&۱&۴&-۷\\۱&۲&۳&-۹\end{bmatrix}$

ت) $A=[۵]\quad,\quad B=[-۷]$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ \ ,\ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix}۲۴\times۲&۲۶\times۲&۱۷\times۲&۱۲\times۲\\۱۵\times۲&۱۹\times۲&۲۸\times۲&۳۱\times۲\\۷\times۲&۱۱\times۲&۲۲\times۲&۳۵\times۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲۴+۲۴&۲۶+۲۶&۱۷+۱۷&۱۲+۱۲\\۱۵+۱۵&۱۹+۱۹&۲۸+۲۸&۳۱+۳۱\\۷+۷&۱۱+۱۱&۲۲+۲۲&۳۵+۳۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲۴&۲۶&۱۷&۱۲\\۱۵&۱۹&۲۸&۳۱\\۷&۱۱&۲۲&۳۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲۴&۲۶&۱۷&۱۲\\۱۵&۱۹&۲۸&۳۱\\۷&۱۱&۲۲&۳۵\end{bmatrix}=A+A=۲A$$

دو ماتریس ۳ × ۳ مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

کاردرکلاس

در هر حالت طرف دوم تساوی را به‌دست آورید.

الف) $-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}=$

ب) $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}=$

پ) $۰\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=$

ت) $۷\times\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=$

هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید :

$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۲\times$

$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=(-۱)\times$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\overline{O}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A و B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

الف) $A+B=B+A$ خاصیت جابه‌جایی

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت‌پذیری

پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ خاصیت عضو خنثی برای ماتریس صفر

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times ۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times ۲+(-۲)\times ۱ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times ۳ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathbb{R}\text{ در}}{\overset{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}}{=\!=\!=}}\begin{bmatrix} -۲\times ۱ & -۲\times ۲ & -۲\times ۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times ۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times ۱ & -۲\times ۴ \\ -۲\times ۳ & -۲\times ۲ & -۲\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

برقراری هر یک از خواص (الف) تا (ح) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ اعداد $r=۲$ و $S=۳$، بررسی کنید.

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

مثال : اگر $A=[-۱ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۳ \quad -۵]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱ \quad ۲ \quad ۰ \quad ۳ \quad -۵]\times\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[C_{ij}]$ ، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iام و ستون jام در آن یعنی، C_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به‌دست می‌آید، یعنی

$C_{ij}=A$ سطر iام $\times$ B ستون jام

$$\Rightarrow C_{ij}=[a_{i۱} \quad a_{i۲} \quad \dots \quad a_{ip}]\times\begin{bmatrix}b_{۱j}\\ b_{۲j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i۱}\times b_{۱j}+a_{i۲}\times b_{۲j}+\dots+a_{ip}\times b_{pj}$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۲ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times۲}$

در این صورت در صورتی که $C=[c_{ij}]_{۳\times۲}=A_{۳\times۳}\times B_{۳\times۲}$ در این صورت ماتریس حاصل‌ضرب یعنی C ماتریسی ۲×۳ بوده و داریم :

$$c_{۱۲}=A \text{ سطر اول } \times B \text{ ستون دوم }=[۱ \quad ۲ \quad -۱]\times\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۵\end{bmatrix}=۱\times۳+۲\times۲+(-۱)\times۵=\dots$$

$$c_{۳۲}=A \text{ سطر سوم } \times B \text{ ستون دوم }=[-۱ \quad -۲ \quad ۴]\times\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۵\end{bmatrix}=(-۳)+(-۴)+۲۰=\dots$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۲ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۲-۴ & ۳+۴-۵\\ ۶-۲+۴ & ۹+۴+۵\\ -۲+۲+۱۶ & -۳-۴+۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ ۸ & ۱۸\\ ۱۶ & ۱۳\end{bmatrix}$$

کار در کلاس

۱ــ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$, $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \Rightarrow A\times B=\cdots , B\times A=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$, $B=[۲ \quad ۳ \quad ۴]_{۱\times۳} \Rightarrow A\times B=\cdots \quad , \quad B\times A=\cdots$

ت) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ $A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

قسمت (ت) با کدام حکم در اعداد حقیقی، متفاوت است؟

۲ــ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید :

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$

ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times۵}$

دو ماتریس ۲ × ۲ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{o}$ و $B\neq\bar{o}$ ولی $A\times B=\bar{o}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کار در کلاس

۱ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

تذکر : گاهی اوقات (A×B) تعریف می‌شود ولی (B×A) تعریف نمی‌شود و در مواردی (A×B) و (B×A) هردو تعریف می‌شوند ولی هم‌مرتبه نیستند. (مثال بزنید) و اگر A و B هر دو مربعی و هم‌مرتبه باشند (A×B) و (B×A) هردو تعریف شده و هم‌مرتبه نیز می‌باشند و کار در کلاس فوق نشان می‌دهد که در این حالت نیز ممکن است A×B≠B×A و لذا خاصیت جابه‌جایی در حالت کلّی برای ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.

۲ــ ماتریس اسکالر $I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانیِ مرتبهٔ n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعیِ مرتبهٔ n است یعنی:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

$$I_n=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱\end{bmatrix}$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ را بررسی کنید.

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد یعنی :

$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۴ــ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی :

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

عمل ترانهاده در ماتریس‌ها

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه از مرتبهٔ $m\times n$ باشد در این صورت هرگاه هر سطر A را با ستون نظیرش جابه‌جا کنیم ماتریسی از مرتبهٔ $n\times m$ حاصل می‌شود که آن را با A^t نمایش داده و A^t را **ترانهادهٔ** ماتریس A می‌نامیم.

کار در کلاس

دوماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & \sqrt{2} & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times4}$ و $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$ مفروض‌اند

می‌خواهیم A^t و B^t را به‌دست آوریم. با توجه به تعریف می‌دانیم، سطر اول A، ستون اولِ A^t را تشکیل می‌دهد و سطر دوم A، .... A^t و .... A ستون سوم A^t را می‌سازد بنابراین داریم،

$$A^t=\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 5 \\ 2 & \ldots & \sqrt{2} \\ -1 & \ldots & 6 \\ 0 & \ldots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{4\times3}$$

و به همین ترتیب B^t محاسبه می‌شود،

$$B^t=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

۱ــ درایه روی سطر دوم ستون چهارم A، عدد ۷– است این درایه روی کدام سطر و ستونِ A^t قرار دارد؟

۲ــ درایه‌های روی قطر اصلی B و B^t (هر دو مربعی و از مرتبهٔ ۳ هستند) را با هم مقایسه کنید.

۳ــ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلیِ B و B^t را با هم مقایسه کنید.

۴ــ اگر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی ماتریس مربعی A، با هم برابر باشند در این صورت A و A^t نسبت به هم چگونه‌اند؟ یک مثال بزنید.

۵ــ اگر ترانهادهٔ ماتریس A را دوباره ترانهاده کنیم چه ماتریسی به‌دست می‌آید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریسی ۳ × ۳ مثال بزنید که ترانهادهٔ آن با قرینه‌اش برابر شود.

خواص عمل ترانهاده

برای عمل ترانهاده چهار خاصیت زیر برقرارند که بدون اثبات این خواص را می‌پذیریم :

الف) $(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$ ب) $(kA)^t=kA^t$ پ) $(AB)^t=B^tA^t$

ت) $(A^t)^t=A$

کار در کلاس

برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ و $k=3$ هر چهار خاصیت ترانهاده را بررسی کنید.

ماتریس متقارن

در قسمت (۴) کار در کلاس قبل مشاهده کردید که در یک ماتریس مربعی مانند A، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی با هم برابر باشند در این صورت $A=A^t$. به ماتریس‌هایی چون A ماتریس متقارن گفته می‌شود و به‌طور کلّی اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد داریم :

متقارن است $A_{n\times n} \Leftrightarrow A^t=A$

مثال : ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & -۲ \\ ۳ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ هر دو متقارن هستند (چرا؟) ماتریس $(A+B)$ را تشکیل دهید، آیا $(A+B)$ متقارن است؟ چه نتیجه‌ای در حالت کلّی می‌توان گرفت؟ ادعای خود را ثابت کنید :

حل : با توجه به تعریف چون $A^t=A$ و $B^t=B$ لذا هر دو ماتریس A و B متقارن هستند و داریم،

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & -۲ \\ ۳ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس $(A+B)$ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی با هم برابرند یا $(A+B)^t=A+B$ لذا ماتریس $(A+B)$ متقارن است.

نتیجه کلّی اینکه :

نتیجه

«همواره مجموع دو ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است»

استدلال زیر را برای اثبات نتیجه‌گیری فوق، کامل کنید :

فرض : $\begin{cases} A=A^t \\ B=B^t \end{cases}$ حکم : $(A+B)^t=A+B$

$$(A+B)^t \xlongequal{\text{خاصیت الف}} A^t+\cdots \xlongequal{\text{فرض}} \cdots+B$$

مثال : اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی و هم‌مرتبه باشند نشان دهید ماتریس (A^tB+B^tA) ماتریسی متقارن است.

حل : کافی است نشان دهیم ترانهادهٔ ماتریس داده شده با خودش برابر است :

$$(A^tB+B^tA)^t=(A^tB)^t+(B^tA)^t=B^t\times(A^t)^t+A^t\times(B^t)^t$$

$$=B^t\times\cdots A^t\times B \xlongequal{\text{جابه‌جایی جمع}} A^tB+\cdots$$

(برای اثبات متقارن بودن یک ماتریس کافی است ترانهادهٔ آن را تشکیل دهیم و نشان دهیم که ترانهاده‌اش با خودش برابر است.)

با توجه به تعریف ماتریس متقارن می‌توان گفت :

۱ــ هر ماتریس قطری .... است.

۲ــ اگر A متقارن باشد و $r\in R$ ماتریس rA ماتریسی .... است.

ماتریس ۳×۳ و متقارنی چون A تعریف کرده $A^۲$ را به‌دست آورید آیا $A^۲$ متقارن است؟

تمرین

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}$ $(n\in\mathbb{N})$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد نشان دهید ماتریس $(A+A^t)$ و ماتریس AA^t هر دو متقارن هستند.

۸ــ حکم مسئلهٔ ۷ را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ ۲ & -۴ & ۷ \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

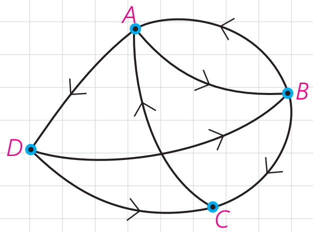
۹ــ درستی تساوی‌های $(AB)^t=B^tA^t$ و $(A+B)^t=A^t+B^t$ را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۱۰ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$$

۱۱ــ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت زیر تعریف شده است، ابتدا A را با درایه‌هایش بنویسید و سپس A^t را تشکیل داده و با A مقایسه کنید.

$$a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i=j \\ i^۲-j & i<j \\ i-j^۲ & i>j \end{cases} \qquad (۱\le i\le ۳\ ,\ ۱\le j\le ۳)$$



۱۲ــ بین چهار تیم فوتبال A و B و C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج توسط یک نمودار در زیر رسم شده است (جهت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است) در کنار این نمودار ماتریسی ۴×۴ نوشته شده که متناظر با آن نمودار است اگر این ماتریس را H بنامیم و جهت همهٔ پیکان‌ها را برعکس کنیم ماتریس نمودار جدید را تشکیل داده و با H مقایسه کنید.

$$H=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

۱۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳ × ۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ برای $(B\times A)$ چه قانونی تعریف می‌کنید؟

۱۴ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $B\times A$ و $A\times B$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۵ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳ × ۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۱۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد با توجه به تمرین ۲ حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

درس دوم

دترمینان[1] و وارون ماتریس‌های ۲×۲

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سویسی (۱۷۵۲–۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع‌به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه : وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود، در ماتریس‌های تبدیل در صفحه که ۲×۲ هستند، تغییرات مساحت شکل تبدیل یافته را می‌توان با استفاده از دترمینان ماتریس تبدیل مشخص کرد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود، دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به‌کار می‌رود، به کمک دترمینان می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به‌دست آورد و نیز از دترمینان در محاسبه ضرب خارجی دو بردار می‌توان استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد $(۱\leq n\leq۳)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم. و داریم:

$$\text{I)}\ A=[k]_{۱\times۱}\Rightarrow |A|=k \qquad \text{II)}\ A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$\text{III)}\ A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}$$

$$+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

$$|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$ برحسب سطر اول

(برای هر ماتریس $۳*۳$ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به‌فرد است)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنهٔ آن مجموعهٔ ماتریس‌های ۲×۲ و هم دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$$\det: M_{۲\times۲}\to\mathbb{R}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right)=ad-bc$$

(منظور از $M_{۲\times۲}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲×۲ است)

1– Determinant

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $A=[-7] \longrightarrow |A|=-7$

ب) $A=\left[\sqrt{2}\right] \rightarrow |A|=\sqrt{2}$

پ) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=(4\times 4-2\times 8)=0$

ت) $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=(-10)-(12)=-22$

ث) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A|=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

برحسب سطر اول

$$|A|=1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(0-12)+(0+6)+2\times(8+2)=(-12)+6+20=14$$

برحسب ستون سوم

$$|A|=2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{2\times 3}\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(8+2)-3\times(4-2)+0=20-6=14$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند محاسبهٔ دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

برحسب سطر دوم

$$|A|=0+0+4\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=-4\times(8-3)=-20$$

برحسب ستون اول

$$|A|=2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}-0+(-3)\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(0-16)-3\times(-4-0)=-32+12=-20$$

(درایهٔ (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳−) روی سطر سوّم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش (فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است)، دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر :

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال : دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوّم و با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟)

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A|=(-۱)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}+(-۲)\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -۱\times(۹-۸)+۲(۶-۴)+۱\times(۴-۳)=-۱+۴+۱=۴$$

$$\left|\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}\right| \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix}$$

با دستور ساروس $|A| = (۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۳) = -۱۳+۱۷=۴$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۴|A| & ۳ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

کار در کلاس

۱ــ برای هریک از ماتریس‌های A و B، دترمینان‌های A، A^t، B و B^t را محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

نتیجه

برای هر ماتریس مربعی از مرتبهٔ n که $۱\leq n\leq ۳$ همواره $|A|=|A^t|$.

۲ــ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ حداکثر ۳ باشد، ثابت کنید :

$|AA^t|\geq ۰$

نتیجه

همواره برای هر دو ماتریس ۲×۲ یا ۳×۳ مانند A و B داریم $|AB|=|A||B|$.

۳ـ با توجه به نتیجه قبل ثابت کنید $|AB|=|BA|$ و سپس این تساوی را برای ماتریس‌های A و B در (۲) تحقیق کنید.

$|AB|=|A||B|=|B|\times\cdots=|B\times\cdots|$

۴ـ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ....

نتیجه

دترمینان ماتریس مربعی صفر، .... است.

۵ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $AA^t=۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

$$AA^t=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t|=\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A||\cdots| = ۲\times\cdots\times\cdots \Rightarrow |A|^۲=۱۰۰ \Rightarrow |A|=\pm۱۰$$

۶ـ اگر I ماتریس همانی و ۳ × ۳ و $k\in\mathbb{R}$ نشان دهید، $|kI|=k^۳$ و پس از پر کردن جاهای خالی نتیجه را بیان کنید. (A ماتریسی ۳ × ۳ است.)

$\Rightarrow |kA|=|k(IA)|=|(kI)A|=|kI|\times|\cdots|=\cdots|A|$

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند a $(a\neq۰)$ را با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a\times\frac{۱}{a}=۱$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است) برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون A ماتریسی است چون B به‌طوری که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱}=۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد به طوری که $A\times A^t=۳I_۳$ در این صورت مقدار $|A|$ را به‌دست آورید.

$|A\times A^t|=|۳I_۳|=\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}$

$\Rightarrow |A|\,|A^t|=۲۷$

$\Rightarrow |A|\times\ldots=۲۷$

$\Rightarrow |A|=\pm\ldots$

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB = BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

فعالیت ۱

۱ــ ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم ماتریسی از تعویض جای درایه‌های روی قطر اصلی A تشکیل دهید.

۲ــ درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس به‌دست آمده در (۱) را قرینه کنید و نام ماتریس حاصل را A^* بنامید.

$$A^*=\begin{bmatrix} d & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۳ــ عدد $\frac{۱}{|A|}$ را در ماتریس A^* ضرب کنید و ماتریس حاصل را B بنامید.

$$B=\frac{۱}{|A|}\times A^*=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} \dots & -b \\ \dots & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ \dots & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} \qquad (|A|=ad-bc)$$

۴ــ نشان دهید که ماتریس B وارونِ ماتریس A است.

$$A\times B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{ad}{|A|}-\frac{bc}{|A|} & -\frac{ab}{|A|}+\frac{ba}{|A|} \\ \dots. & \dots. \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{|A|} & \frac{۰}{|A|} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس $B=A^{-۱}$ است.

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ A^{-1} واضح است که اگر $|A|=0$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (A وارون‌پذیر نیست.) به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A|\neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

چون $|A|=2\neq 0$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

فعالیت ۲

دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را در نظر بگیرید می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} \cdots+\cdots \\ 7x+4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 7x+4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل است با دستگاه دو معادله و دو مجهولِ مفروض

اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$

$=CI=C$

۱ــ حال اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی $A^{-۱}$ را بیابید.

$|A| = \cdots - \cdots = ۱ \neq ۰ \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲ــ معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \end{cases}$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x - y = ۴ \\ -۴x + ۲y = ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟

این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن x و yای است که در هر دو معادلهٔ دستگاه که هرکدام معادلهٔ یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

تذکر: در حالت کلّی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاهِ دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax+by=e_۱ \\ cx+dy=e_۲ \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و در صورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq ۰$ با ضرب $A^{-۱}$ از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B \Rightarrow (A^{-۱}A)X=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-۱}B \Rightarrow X=A^{-۱}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل: ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و چون $|A|=۲\neq ۰$ پس $A^{-۱}$ وجود دارد با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردنِ درایه‌های

روی قطر فرعیِ ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A|=۲$، ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲}\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots\\ ۲\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}}\begin{cases}x=\cdots\\ y=۲\end{cases}$$

کاردرکلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x-۳y=۳\\ -۴x+۶y=۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ــ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ــ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases}x-۳y=۲\\ -۳x+۹y=-۶\end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A|=۰$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

قضیه: برای دو ماتریس وارون‌پذیر، ۲×۲ و دلخواهِ A و B داریم:

الف) $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$

ب) $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$

پ) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

اثبات :

برای اثبات هر سه قسمت از قضیهٔ یکتایی وارون استفاده می‌کنیم :

الف) $(A\times B)\times(B^{-۱}\times A^{-۱})=A\times(B\times B^{-۱})\times A^{-۱}=(A\times I)\times A^{-۱}$

$$A\times A^{-۱}=I\Rightarrow(B^{-۱}\times A^{-۱})=(A\times B)^{-۱}$$

ب) $(kA)\times\left(\frac{۱}{k}A^{-۱}\right)\Rightarrow\left(k\times\frac{۱}{k}A\right)A^{-۱}\Rightarrow\cdots\times A^{-۱}=\cdots$

$$\Rightarrow\frac{۱}{k}A^{-۱}=(\cdots)^{-۱}$$

ج) $(A^{-۱})\times A=\ldots\Rightarrow \mathrm{A}=(A^{-۱})^{-۱}$

تمرین

۱ــ اگر $A=[1\ \ 2\ \ -3]$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس BA و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & 1\\5 & |A|\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(-2|A|^3\right)$ را بیابید.

۴ــ با این فرض که برای هر دو ماتریس 3×3 مانند A و B تساوی $|AB|=|A||B|$ برقرار باشد نشان دهید، $|A^3|=|A|^3$

۵ــ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=5$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۶ــ دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ را بیابید.

۷ــ ماتریسی 3×3 چون A بیابید که در معادلهٔ $3|A|^2-7|A|-6=0$ صدق کند.

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\5 & -1\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1}-3B^{-1})$ را بیابید.

۹ــ اگر $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

۱۰ــ برای هر ماتریس ۲ × ۲ مانند A ثابت کنید :

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

(راهنمایی: از تساوی $AA^{-1}=I$ و سپس $|AA^{-1}|=|I|$ استفاده کنید.)

۱۱ــ اگر A ماتریسی ۲ × ۲ و وارون‌پذیر باشد و $|A|=3$ حاصل عبارت $\left(|A^{3}|-3|A^{-1}|+5\right)$ را بیابید.

۱۲ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}1\\ 10\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

۱۳ــ به ازای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases}kx+3y=4\\ x-2y=3\end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۴ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases}3x-5y=-1\\ 2x+y=8\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x+3y=5\\ -2x-6y=1\end{cases}$

پ) $\begin{cases}-2x+3y=2\\ 4x-6y=-4\end{cases}$