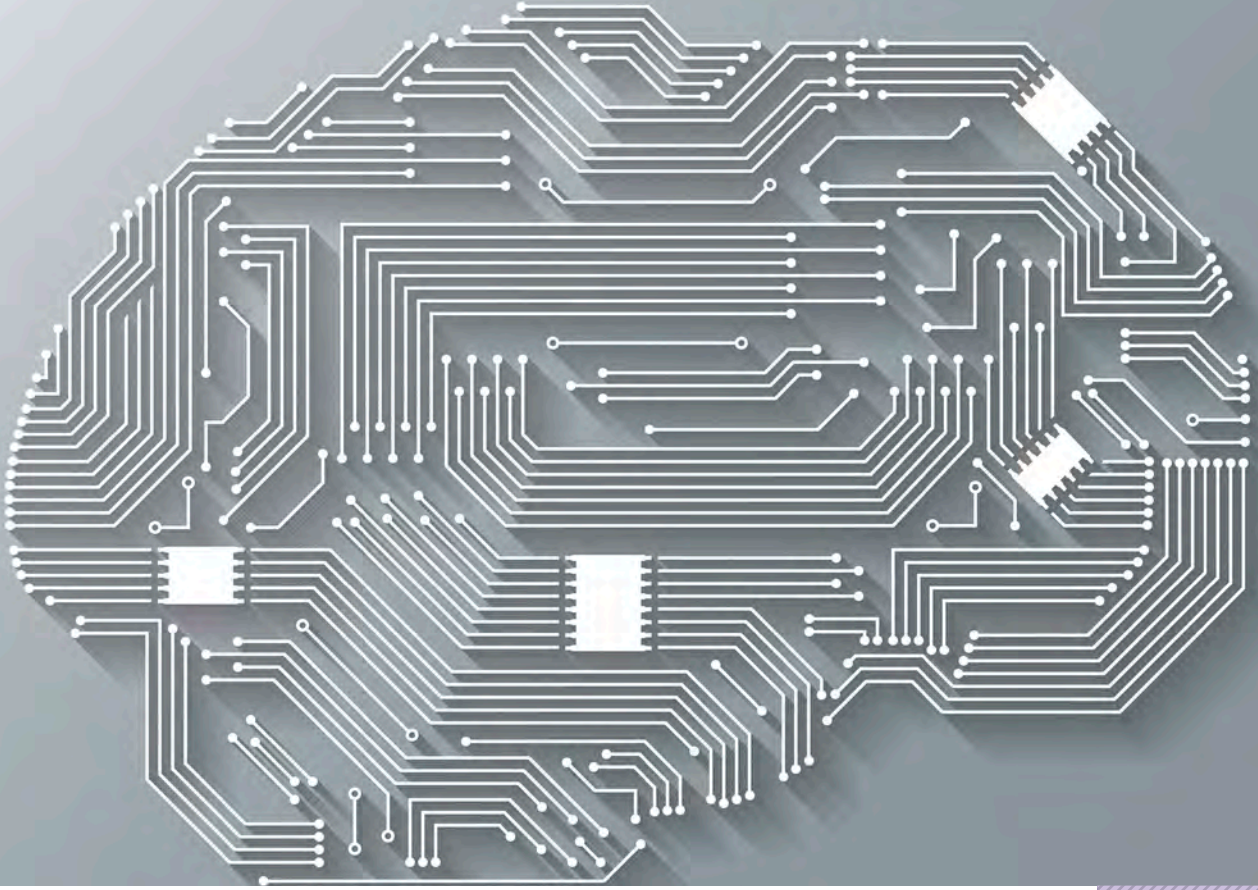


فصل اوّل

## ماتریس و کاربردها



عکس - ۴۴

## ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول و حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

امتیاز	مساوی	باخت	برد	
۳۰	۳	۳	۹	تیم A
۲۵	۴	۴	۷	تیم B
۲۴	۶	۳	۶	تیم C
۲۲	۴	۵	۶	تیم D

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{امتیاز} \\ \text{مساوی} \\ \text{باخت} \\ \text{برد} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 30 \\ 7 & 4 & 4 & 25 \\ 6 & 3 & 6 & 24 \\ 6 & 5 & 4 & 22 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف  $M$  نمایش دهیم، خواهیم داشت :

**تعریف:** هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند  $A$  و  $B$  و  $C$  ... نام گذاری می‌کنیم.

**مثال:** این ماتریس، ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای  $3 \times 4 = 12$  درایه است و مثلاً عدد حقیقی  $\sqrt{2}$  درایه روی سطر اول و ستون چهارم است و درایه  $(-7)$  روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلی اگر ماتریسی چون  $A$  دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد می‌نویسیم  $A_{mn}$  و می‌خوانیم ( $A$  ماتریسی از مرتبه  $m \times n$  ( $m$  در  $n$ ) است.) برای هر درایه ماتریس و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 20 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند، یعنی درایه روی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام.

ماتریس  $A_{2 \times 3}$  و ماتریس  $B_{m \times n}$  با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه  $b_{ij}$  را درایه عمومی ماتریس  $B$  می‌نامیم که  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس  $B$  را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم  $B = [b_{ij}]$ .

**مثال:** اگر ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  ماتریسی  $2 \times 2$  باشد و برای  $i=j$  داشته باشیم  $a_{ij}=7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij}=5$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij}=-2$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌هایشان نمایش دهید.

**حل:**  $a_{11}=a_{22}=7$  و  $a_{21}=5$  و  $a_{12}=-2$  پس  $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ .

### کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه  $A, B, C$  و  $D$  در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس  $3 \times 4$  و یک بار با ماتریسی  $4 \times 3$  نمایش دهید.

۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن	فروشگاه A
۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن	فروشگاه B
۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن	فروشگاه C
۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن	فروشگاه D

۱- اگر  $m=n=1$  در این صورت ماتریس  $[K]_{1 \times 1}$  را مساوی با عدد حقیقی  $K$  تعریف می‌کنیم.

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراس (۱۸۱۵-۱۸۹۷) و دیگران در نیمه دوم قرن نوزدهم و نیمه اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

## ■ معرفی چند ماتریس خاص

۱- اگر در ماتریس  $A$ ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی  $n$  باشد،  $A$  را یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  ( $n \times n$ ) می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad C = [5]_{1 \times 1}$$

در ماتریس‌های  $A$  و  $B$  قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می‌نامیم.

۲- اگر ماتریس  $A$  فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2}, \quad B = [2 \ -1 \ 4 \ 5]_{1 \times 4}, \quad C = [7]_{1 \times 1} = 7$$

۳- اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{و} \quad C = [114]_{1 \times 1} = 114$$

۴- ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = [2]$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های قطری و اسکالر می‌توان گفت: هر ماتریس ..... ماتریسی ..... است ولی هر ماتریس ..... ممکن است ماتریسی ..... نباشد.

۶- ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد  $\bar{O}$  نشان می‌دهیم.

### کاربرد ماتریس‌ها:

یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ)، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند. و در رایانه و علوم می‌باشد. آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌های نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطه تنگاتنگ دارد.

**تساوی بین دو ماتریس:** دو ماتریس هم‌مرتبه  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

**مثال:** اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  مساوی باشند  $(x+y+z)$  را بیابید.

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} x-y = 3 \\ x+y = 9 \end{cases}, z-1 = 5 \Rightarrow x = 6, y = 3, z = 6 \Rightarrow x+y+z = 15$$

### جمع ماتریس‌ها

در کاردر کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکننده لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است:

D	C	B	A	
۱۲+۲۰	۱۷+۲۰	۲۶+۲۰	۲۴+۲۰	شلوار
۳۱+۳۰	۲۸+۳۰	۱۹+۳۰	۱۵+۳۰	بلوز
۳۵+۵۰	۲۲+۵۰	۱۱+۵۰	۷+۵۰	پیراهن

اگر این جدول را با یک ماتریس  $3 \times 4$  نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت:

$$\begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 44 & 46 & 37 & 32 \\ 45 & 49 & 58 & 61 \\ 57 & 61 & 72 & 85 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه  $A$  و  $B$  کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل  $A$  و  $B$  ماتریسی است چون  $C$  که از همان مرتبه  $A$  و  $B$  است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

مانند نمونه ماتریس های A و B را در هر حالت با هم جمع کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ب)  $A = [1 \ -1 \ 3 \ 7], \quad B = [3 \ 2 \ -1 \ 4]$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

ت)  $A = [5], \quad B = [-7]$

### ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

**تعریف:** برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه های ماتریس ضرب می کنیم، به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به صورت زیر نوشته می شود:

$$B = \begin{bmatrix} 24 \times 2 & 26 \times 2 & 17 \times 2 & 12 \times 2 \\ 15 \times 2 & 19 \times 2 & 28 \times 2 & 31 \times 2 \\ 7 \times 2 & 11 \times 2 & 22 \times 2 & 35 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 26+26 & 17+17 & 12+12 \\ 15+15 & 19+19 & 28+28 & 31+31 \\ 7+7 & 11+11 & 22+22 & 35+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} = A + A = 2A$$

دو ماتریس  $3 \times 3$  مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

در هر حالت طرف دوم تساوی را به دست آورید.

$$\text{الف) } -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\text{پ) } 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\text{ت) } 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \times$$

**قرینهٔ یک ماتریس:** اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس  $A$  را با  $(-A)$  نمایش داده و از ضرب  $(-1)$  در ماتریس  $A$  به دست می‌آید. واضح است که  $A + (-A) = \bar{0}$

### خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  ماتریس‌هایی  $m \times n$  (هم‌مرتبه) و  $r$  و  $s$  اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند:

- |                                      |                                |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| الف) $A+B=B+A$                       | خاصیت جابه‌جایی                |
| ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$                 | خاصیت شرکت‌پذیری               |
| پ) $A+\bar{0} = \bar{0}+A=A$         | خاصیت عضو خنثی برای ماتریس صفر |
| ت) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{0}$           | خاصیت عضو قرینه                |
| ث) $r(A \pm B)=rA \pm rB$            |                                |
| ج) $(r \pm s)A=rA \pm sA$            |                                |
| ح) $rA=rB, r \neq 0 \Rightarrow A=B$ |                                |
| ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$           |                                |

اگر فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  در این صورت نشان می‌دهیم که  $(-2)(A+B) = (-2)A + (-2)B$ ،

$$\begin{aligned} -2(A+B) &= (-2) \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-2) \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 3+4 \\ (-1)+3 & 3+2 & (-5)+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)(1+(-2)) & (-2)(2+1) & (-2)(3+4) \\ (-2)((-1)+3) & (-2)(3+2) & (-2)((-5)+0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) & -2 \times 2 + (-2) \times 1 & -2 \times 3 + (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-1) + (-2) \times 3 & -2 \times 3 + (-2) \times 2 & (-2) \times (-5) + (-2) \times 0 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R}}{=} \begin{bmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ (-2) \times (-1) & -2 \times 3 & (-2) \times (-5) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (-2) \times (-2) & -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times 3 & -2 \times 2 & -2 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= (-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-2)A + (-2)B \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  در این صورت برای  $r \in \mathbb{R}$  داریم:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})] \\ &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] \quad \text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R} \\ &= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] \quad \text{تعریف جمع (تفاضل)} \\ &= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] \quad \text{تعریف ضرب عدد در ماتریس} \\ &= rA \pm rB \end{aligned}$$

### ■ ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر  $A$  ماتریس سطری و  $B$  ماتریس ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  برابر باشند در این صورت  $A \times B$  تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس  $A$  را در درایه نظیرش در  $B$  ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی  $1 \times 1$  یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

برقراری هر یک از خواص (الف) تا

(ح) را برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  اعداد  $r = 2$  و  $s = 3$  بررسی کنید.



یک ماتریس سطری  $1 \times 3$  مانند  $A$  و  
 یک ماتریس ستونی  $3 \times 1$  مانند  $B$   
 طوری تعریف کنید که  $A \times B = -7$

**مثال:** اگر  $A = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5]$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:

$$A \times B = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5] \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15] = 15$$

### ضرب ماتریس در ماتریس

اگر  $A$  ماتریسی  $m \times p$  و  $B$  ماتریسی  $p \times n$  باشد (تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  با سطرهای  $B$  برابر باشد) در این صورت  $A_{mp} \times B_{pn}$  قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم  $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn} = [C_{ij}]$ ، ماتریس  $C$  ماتریسی  $m \times n$  بوده که درایه روی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام در آن  $C_{ij}$ ، یعنی از ضرب سطر  $i$ ام  $A$  در ستون  $j$ ام  $B$  به دست می‌آید، یعنی

$C_{ij} = A$  سطر  $i$ ام  $\times$  ستون  $j$ ام  $B$

$$\Rightarrow C_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}] \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

**مثال:** اگر  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

در این صورت در صورتی که  $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2} = C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$  در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی  $C$  ماتریسی  $3 \times 2$  بوده و داریم:

$$c_{12} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ دوم ستون} = [1 \ 2 \ -1] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = \dots$$

$$c_{22} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ دوم ستون} = [-1 \ -2 \ 4] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3) + (-4) + 20 = \dots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

۱- برای هر حالت  $A \times B$  و  $B \times A$  را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \dots$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots, B \times A = \dots$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ,  $B = [2 \ 3 \ 4]_{1 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots, B \times A = \dots$

ت)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

قسمت (ت) با کدام حکم در اعداد حقیقی، متفاوت است؟

۲- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 5$  باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که  $A \times B$  و  $B \times A$  قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

الف)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$       ب)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$       پ)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$

ت)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$       ث)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$

### خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

#### نتیجه

در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

دو ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \neq 0$  و  $A \neq 0$  ولی  $A \times B = 0$

**تذکر:** گاهی اوقات  $(A \times B)$  تعریف می‌شود ولی  $(B \times A)$  تعریف نمی‌شود و در مواردی  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  هر دو تعریف می‌شوند ولی هم مرتبه نیستند. (مثال بزنید) و اگر  $A$  و  $B$  هر دو مربعی و هم مرتبه باشند  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  هر دو تعریف شده و هم مرتبه نیز می‌باشند و کار در کلاس فوق نشان می‌دهد که در این حالت نیز ممکن است  $A \times B \neq B \times A$  و لذا خاصیت جابه‌جایی در حالت کلی برای ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.

۲- ماتریس اسکالر  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را از چپ و راست در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ضرب کرده و حاصل ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبه  $n$  می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبه  $n$  است یعنی:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  در این صورت درستی تساوی  $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$  را بررسی کنید.

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $C = [c_{ij}]_{p \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$  در این صورت ضرب ماتریس  $A$  در مجموع  $(B+C)$  خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش‌پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times k}$  و  $C = [c_{ij}]_{k \times n}$  در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

### عمل ترانژاده در ماتریس‌ها

اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ماتریسی دلخواه از مرتبه  $m \times n$  باشد در این صورت هرگاه هر سطر  $A$  را با ستون نظیرش جابه‌جا کنیم ماتریسی از مرتبه  $n \times m$  حاصل می‌شود که آن را با  $A^t$  نمایش داده و  $A^t$  را ترانژاده ماتریس  $A$  می‌نامیم.

### کاردرکلاس

دوماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & \sqrt{2} & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 4}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  مفروضه اند

می‌خواهیم  $A^t$  و  $B^t$  را به دست آوریم. با توجه به تعریف می‌دانیم، سطر اول  $A$ ، ستون اول  $A^t$  را تشکیل می‌دهد و سطر دوم  $A$ ،  $A^t$  و  $A$  ستون سوم  $A^t$  را می‌سازد بنابراین داریم،

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 5 \\ 2 & \dots & \sqrt{2} \\ -1 & \dots & 6 \\ 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

و به همین ترتیب  $B^t$  محاسبه می‌شود،

$$B^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

۱- درایه روی سطر دوم ستون چهارم  $A$ ، عدد  $-7$  است این درایه روی کدام سطر و ستون  $A^t$  قرار دارد؟

۲- درایه‌های روی قطر اصلی  $B$  و  $B^t$  (هر دو مربعی و از مرتبه ۳ هستند) را با هم مقایسه کنید.

۳- درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی  $B$  و  $B^t$  را با هم مقایسه کنید.

۴- اگر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی ماتریس مربعی  $A$ ، با هم برابر باشند در این صورت  $A$  و  $A^t$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ یک مثال بزنید.

۵- اگر ترانهادهٔ ماتریس  $A$  را دوباره ترانهاده کنیم چه ماتریسی به دست می‌آید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریسی  $3 \times 3$  مثال بزنید که ترانهادهٔ آن با قرینه‌اش برابر شود.

### خواص عمل ترانهاده

برای عمل ترانهاده چهار خاصیت زیر برقرارند که بدون اثبات این خواص را می‌پذیریم:

الف)  $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$       ب)  $(kA)^t = kA^t$       پ)  $(AB)^t = B^t A^t$

ت)  $(A^t)^t = A$

### کاردرکلاس

برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  و  $k=3$  هر چهار خاصیت ترانهاده را بررسی کنید.

## ■ ماتریس متقارن

در قسمت (۴) کار در کلاس قبل مشاهده کردید که در یک ماتریس مربعی مانند  $A$ ، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی با هم برابر باشند در این صورت  $A=A^t$ . به ماتریس‌هایی چون  $A$  ماتریس متقارن گفته می‌شود و به‌طور کلی اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد داریم:

$$A^t = A \Leftrightarrow A_{n \times n} \text{ متقارن است}$$

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  هر دو متقارن

هستند (چرا؟) ماتریس  $(A+B)$  را تشکیل دهید، آیا  $(A+B)$  متقارن است؟ چه نتیجه‌ای در حالت کلی می‌توان گرفت؟ ادعای خود را ثابت کنید:

**حل:** با توجه به تعریف چون  $A^t = A$  و  $B^t = B$  لذا هر دو ماتریس  $A$  و  $B$  متقارن هستند و داریم،

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس  $(A+B)$  درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی با هم برابرند یا  $(A+B)^t = A+B$  لذا ماتریس  $(A+B)$  متقارن است. نتیجه کلی اینکه:

### نتیجه

«همواره مجموع دو ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است»

استدلال زیر را برای اثبات نتیجه‌گیری فوق، کامل کنید:

فرض:  $\begin{cases} A = A^t \\ B = B^t \end{cases}$  حکم:  $(A+B)^t = A+B$

$(A+B)^t \stackrel{\text{فرض}}{=} \dots + A^t + \dots \stackrel{\text{خاصیت الف}}{=} \dots + B + \dots$

**مثال:** اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی مربعی و هم‌رتبه باشند نشان دهید ماتریس  $(A^t B + B^t A)$  ماتریسی متقارن است.

**حل:** کافی است نشان دهیم ترانوادهٔ ماتریس داده شده با خودش برابر است:

$$\begin{aligned} (A^t B + B^t A)^t &= (A^t B)^t + (B^t A)^t = B^t \times (A^t)^t + A^t \times (B^t)^t \\ &= B^t \times \dots + A^t \times B \stackrel{\text{جاب‌جایی جمع}}{=} A^t B + \dots \end{aligned}$$

(برای اثبات متقارن بودن یک ماتریس کافی است ترانوادهٔ آن را تشکیل دهیم و نشان دهیم که ترانواده‌اش با خودش برابر است.)

با توجه به تعریف ماتریس متقارن می‌توان گفت:

۱- هر ماتریس قطری ..... است.

۲- اگر  $A$  متقارن باشد و  $r \in \mathbb{R}$  ماتریس  $rA$  ماتریسی ..... است.

ماتریس  $3 \times 3$  و متقارنی چون  $A$  تعریف کرده  $A^2$  را به دست آورید آیا  $A^2$  متقارن است؟

۱- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  ماتریسی  $3 \times 4$  باشد به طوری که برای  $i = j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i + j$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i^2$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A = B$  در این صورت حاصل  $(x + y + z)$  را بیابید.

۳- دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \neq \bar{0}$  و  $B \neq \bar{0}$  ولی  $AB = \bar{0}$

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی  $AB = AC$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$ .

۵- اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد و توان‌های  $A$  را به صورت  $A^2 = AA^2$  و  $A^3 = AA^2$  و  $\dots$  و  $A^n = AA^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) در این صورت با فرض  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^2$  و  $A^3$  و  $A^7$  را بیابید.

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

۷- اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  باشد نشان دهید ماتریس  $(A + A^t)$  و ماتریس  $AA^t$  هر دو متقارن هستند.

۸- حکم مسئله ۷ را برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$  بررسی کنید.

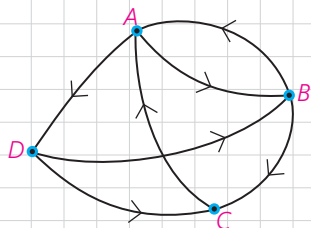
۹- درستی تساوی‌های  $(AB)^t = B^t A^t$  و  $(A+B)^t = A^t + B^t$  را برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$  بررسی کنید.

۱۰- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا  $A$  و  $B$  را با درایه‌هایشان نوشته و سپس  $A \times B$  و  $B \times A$  را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$$

۱۱- ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت زیر تعریف شده است، ابتدا  $A$  را با درایه‌هایش بنویسید و سپس  $A^t$  را تشکیل داده و با  $A$  مقایسه کنید.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ i^2 - j & i < j \\ i - j^2 & i > j \end{cases} \quad (1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)$$



۱۲- بین چهار تیم فوتبال  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  مسابقاتی برگزار شده است و نتایج توسط یک نمودار در زیر رسم شده است (جهت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است) در کنار این نمودار ماتریسی  $4 \times 4$  نوشته شده که متناظر با آن نمودار است اگر این ماتریس را  $H$  بنامیم و جهت همه پیکان‌ها را برعکس کنیم ماتریس نمودار جدید را تشکیل داده و با  $H$  مقایسه کنید.

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$  ماتریسی قطری باشد و  $B$  ماتریسی  $3 \times 3$  و دلخواه باشد

در این صورت ماتریس  $(A \times B)$  را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ برای  $(B \times A)$  چه قانونی تعریف می‌کنید؟

۱۴- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $B$  ماتریسی هم مرتبه  $A$  در این صورت الف) برای  $A \times B$  و  $B \times A$  قوانینی تعریف کنید. ب) آیا تساوی  $A \times B = B \times A$  برقرار است؟

۱۵- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $3 \times 3$  و تعویض پذیر باشند  $(A \times B = B \times A)$  ثابت کنید.

الف)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب)  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

۱۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد با توجه به تمرین ۲ حاصل  $A^2$  را به دست

آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

## دترمینان ۱ و وارون ماتریس‌های ۲×۲

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود، در ماتریس‌های تبدیل در صفحه که ۲×۲ هستند، تغییرات مساحت شکل تبدیل یافته را می‌توان با استفاده از دترمینان ماتریس تبدیل مشخص کرد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود، دترمینان در هندسه برای محاسبه مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می‌رود، به کمک دترمینان می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز از دترمینان در محاسبه ضرب خارجی دو بردار می‌توان استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئسی (۱۷۰۴-۱۷۵۲) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

**تعریف:** اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  باشد ( $1 \leq n \leq 3$ ) در این صورت دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $\det(A) = |A|$  نمایش می‌دهیم. و داریم:

$$\text{I) } A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k \quad \text{II) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$\text{III) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{برحسب سطر اول } |A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان  $A$  را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به فرد است)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ و هم دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی یعنی  $\mathbb{R}$  است.

$$\det : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

(منظور از  $M_{2 \times 2}$  مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ است)



**مثال:** دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $A = [-7] \rightarrow |A| = -7$

ب)  $A = [\sqrt{2}] \rightarrow |A| = \sqrt{2}$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (4 \times 4 - 2 \times 8) = 0$

ت)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1 \cdot 0) - (1 \cdot 2) = -22$

ث)  $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

**مثال:** دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را بر حسب یک سطر و یک ستون دلخواه

به دست آورید:

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

بر حسب سطر اول

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (0 - 12) + (0 + 6) + 2 \times (8 + 2) = (-12) + 6 + 20 = 14$$

بر حسب ستون سوم

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (8 + 2) - 3 \times (4 - 2) + 0 = 20 - 6 = 14$$

تذکره: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، در ایه یا در ایه‌های صفر هستند محاسبه دترمینان آن ماتریس بر حسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

بر حسب سطر دوم

$$|A| = 0 + 0 + 4 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (8 - 3) = -20$$

بر حسب ستون اول

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (0 - 16) - 3 \times (-4 - 0) = -32 + 12 = -20$$

(در ایه ۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و در ایه ۳ (-) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

### دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های $3 \times 3$

در این روش (فقط برای ماتریس های  $3 \times 3$  قابل استفاده است)، دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و  $|A|$  برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی  $A$  و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

**مثال:** دترمینان ماتریس  $A$  را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید (کدام روش راحت تر است؟)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -1 \times (9 - 8) + 2(6 - 4) + 1 \times (4 - 3) = -1 + 4 + 1 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$$

### کاردکلاس

۱- برای هر یک از ماتریس های  $A$  و  $B$ ، دترمینان های  $A^t$ ،  $B^t$  و  $B^t A^t$  را محاسبه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

### نتیجه

برای هر ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  که  $1 \leq n \leq 3$  همواره  $|A^t| = |A|$ .

۲- ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض اند ماتریس  $A \times B$  را به دست آورده و تساوی  $|AB| = |A||B|$  را بررسی کنید.

اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & | & A \\ 1 & & | & A \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را بیابید.

اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه حداکثر ۳ باشد، ثابت کنید:

$$|AA^t| \geq 0$$

### نتیجه

همواره برای هر دو ماتریس  $2 \times 2$  یا  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  داریم  $|AB| = |A||B|$ .

۳- با توجه به نتیجه قبل ثابت کنید  $|AB| = |BA|$  و سپس این تساوی را برای ماتریس‌های  $A$  و  $B$  در (۲) تحقیق کنید.

$$|AB| = |A||B| = |B| \times \dots = |B| \times \dots$$

۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را برحسب سطر اول یا دستور

ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی  $A$ ، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

### نتیجه

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با .....

### نتیجه

دترمینان ماتریس مربعی صفر، ..... است.

۵- اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  باشد و داشته باشیم  $AA^t = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را به دست آورید.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A||\dots| = 2 \times \dots \times \dots \Rightarrow |A|^2 = 100 \Rightarrow |A| = \pm 10$$

۶- اگر  $I$  ماتریس همانی  $3 \times 3$  و  $k \in \mathbb{R}$  نشان دهید،  $|kI| = k^3$  و پس از پر کردن جاهای خالی نتیجه را بیان کنید. ( $A$  ماتریس  $3 \times 3$  است.)

$$\Rightarrow |kA| = |k(IA)| = |(kI)A| = |kI| \times |\dots| = \dots |A|$$

### وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند  $a$  ( $a \neq 0$ ) را با  $\frac{1}{a}$  نشان می‌دهیم و همواره  $a \times \frac{1}{a} = 1$  (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است) برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$ ، وارون  $A$  ماتریسی است چون  $B$  به طوری که  $A \times B = B \times A = I$ . در این صورت  $B$  را وارون  $A$  می‌نامیم و با  $A^{-1}$  نشان می‌دهیم.

اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $a_{11} = 4$  در این صورت  $|A|$  را بیابید.

اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد به طوری که  $A \times A^t = 3I_3$  در این صورت مقدار  $|A|$  را به دست آورید.

$$|A \times A^t| = |3I_3| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A||A^t| = 27$$

$$\Rightarrow |A| \times \dots = 27$$

$$\Rightarrow |A| = \pm \dots$$

**مسئله:** نشان دهید ماتریس  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است. کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم  $AB = BA = I$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### ۱ فعالیت

۱- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم ماتریسی از تعویض جای درایه‌های روی قطر اصلی  $A$  تشکیل دهید.

۲- درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس به دست آمده در (۱) را قرینه کنید و نام ماتریس حاصل را  $A^*$  بنامید.

$$A^* = \begin{bmatrix} d & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۳- عدد  $\frac{1}{|A|}$  را در ماتریس  $A^*$  ضرب کنید و ماتریس حاصل را  $B$  بنامید.

$$B = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} \dots & -b \\ \dots & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ \dots & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} \quad (|A| = ad - bc)$$

۴- نشان دهید که ماتریس  $B$  وارون ماتریس  $A$  است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad}{|A|} - \frac{bc}{|A|} & -\frac{ab}{|A|} + \frac{ba}{|A|} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{|A|} & 0 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس  $B = A^{-1}$  است.

آیا دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  وارون یکدیگرند؟ چرا؟

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت وارون ماتریس  $A$  یعنی  $A^{-1}$  از تساوی زیر به دست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ  $A^{-1}$  واضح است که اگر  $|A| = 0$  آنگاه  $A^{-1}$  وجود ندارد. ( $A$  وارون‌پذیر نیست). به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه  $A^{-1}$  وجود داشته باشد ( $A$  وارون‌پذیر باشد) آن است که  $|A| \neq 0$ .

**مثال:** وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

چون  $|A| = 2 \neq 0$  پس  $A$  دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

### ■ حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

### ۲ فعالیت

دستگاه  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$  را در نظر بگیرید می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dots + \dots \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل است با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد ماتریس  $(A^{-1})^{-1}$  را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

**قضیه یکتایی وارون:** وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های  $2 \times 2$  محاسبه شده است) در صورت وجود منحصر به فرد است.

**اثبات:** فرض کنیم ماتریس‌های  $B$  و  $C$  هر دو وارون  $A$  باشند ثابت می‌کنیم  $B = C$

$$\text{طبق فرض: } AB = BA = I$$

$$\text{طبق فرض: } AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB)$$

$$= CI = C$$

۱- حال اگر فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$  را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس  $A$  وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی  $A^{-1}$  را بیابید.

$|A| = \dots - \dots = 1 \neq 0 \Rightarrow A$  وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- معادله ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در  $A^{-1}$  ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن  $x$  و  $y$  ای است که در هر دو معادله دستگاه که هر کدام معادله یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

تذکر: در حالت کلی اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب و  $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$  ماتریس مقادیر معلوم و  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول  $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$  باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی  $AX=B$  نوشته شده و در صورتی که ماتریس  $A$  وارون‌پذیر باشد یا  $|A| \neq 0$  با ضرب  $A^{-1}$  از چپ در معادله فوق می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

**مثال:** دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

**حل:** ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و چون  $|A| = 2 \neq 0$  پس  $A^{-1}$  وجود دارد با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه‌های

دستگاه معادلات  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

روی قطر فرعی ماتریس  $A$  و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر  $|A|=2$ ، ماتریس  $A^{-1}$  را به دست می‌آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}} \begin{cases} x = \dots \\ y = 2 \end{cases}$$

### کار در کلاس

دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

۱- هر یک از معادلات دستگاه معادله یک خط در صفحه است شیب هر یک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲- ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳- سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$  پاسخ داده و اگر  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و  $|A|=0$  برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

**قضیه:** برای دو ماتریس وارون پذیر،  $2 \times 2$  و دلخواه  $A$  و  $B$  داریم:

الف)  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

ب)  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

پ)  $(A^{-1})^{-1} = A$

### اثبات:

برای اثبات هر سه قسمت از قضیه یکتایی وارون استفاده می‌کنیم:

الف)  $(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1} = (A \times I) \times A^{-1}$

$$A \times A^{-1} = I \Rightarrow (B^{-1} \times A^{-1}) = (A \times B)^{-1}$$

ب)  $(kA) \times \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) \Rightarrow \left(k \times \frac{1}{k} A\right) A^{-1} \Rightarrow \dots \times A^{-1} = \dots$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} A^{-1} = (\dots)^{-1}$$

ج)  $(A^{-1}) \times A = \dots \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس  $BA$  و  $|BA|$  را به دست آورید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A^2|$  را به دست آورید.

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & 1 \\ 5 & |A| \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید.

۴- با این فرض که برای هر دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  تساوی  $|AB| = |A||B|$  برقرار باشد نشان دهید،  $|A^3| = |A|^3$ .

۵- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 5$  در این صورت حاصل  $||A|A|$  را بیابید.

۶- دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  را بیابید.

۷- ماتریسی  $3 \times 3$  چون  $A$  بیابید که در معادله  $3|A|^2 - 7|A| - 6 = 0$  صدق کند.

۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $(2A^{-1} - 3B^{-1})$  را بیابید.

۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را به دست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.



۱۰- برای هر ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A$  ثابت کنید :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(راهنمایی: از تساوی  $AA^{-1} = I$  و سپس  $|AA^{-1}| = |I|$  استفاده کنید.)

۱۱- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  و وارون پذیر باشد و  $|A| = 3$  حاصل عبارت  $(|A^3| - 3|A^{-1}| + 5)$  را بیابید.

۱۲- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب دستگاه بوده و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

۱۳- به ازای چه مقداری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۴- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب های هر یک از دستگاه های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$