فصل ۲

مثلثات

درس اوّل

تناوب و تابع تانژانت

درس دوم

معادلات مثلثاتی

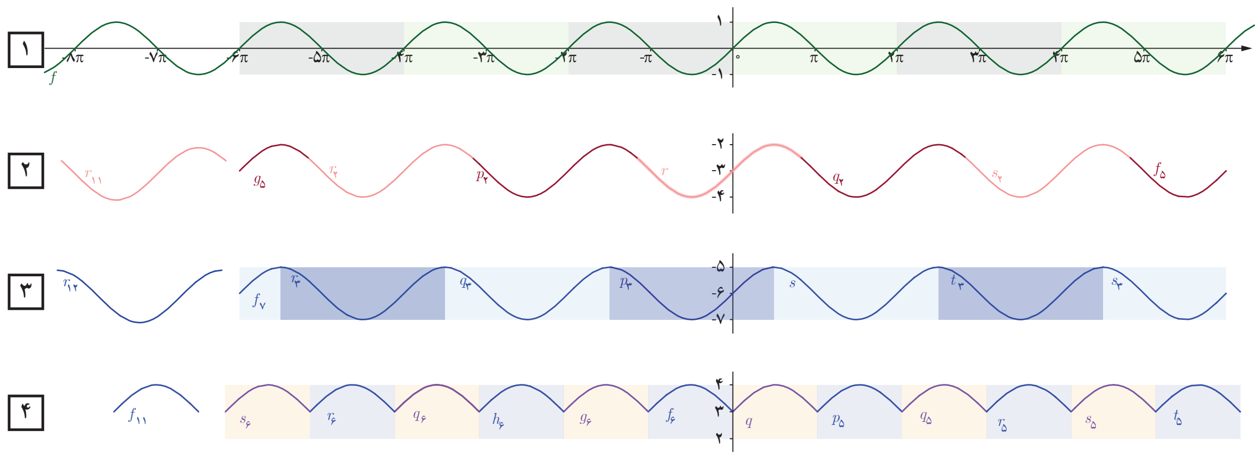
درس اوّل

تناوب و تابع تانژانت

درستی رابطه $\sin(x \pm k\pi) = \sin x$ را در سال گذشته دیدیم (یادآور می‌شویم که رابطه مشابهی برای $\cos x$ نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع $y=\sin x$ بر بازه‌های به طول ۲π باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع $y=\sin x$ را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

فعالیت

۱ در شکل زیر نمودار تابع $y=\sin x$ رسم شده است. همچنین قطعاتی از این نمودار به طول‌های مختلف و در بازه‌های مختلف جدا کرده‌ایم. مثلاً در ردیف ۱ قطعه‌ای به طول ۲π در بازه $[۰, ۲\pi]$ و در ردیف ۲ قطعه‌ای به طول ۲π اما در بازه $[\frac{-۷\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}]$ در نظر گرفته‌ایم. سپس در هر ردیف تعدادی کپی از قطعه مربوطه گرفته و در کنار هم به‌طور متوالی قرار داده‌ایم تا نمودار سمت راست آن ردیف ساخته شود. مشاهده می‌شود که مثلاً در ردیف ۱ نمودار $y=\sin x$ بازسازی شده است. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.



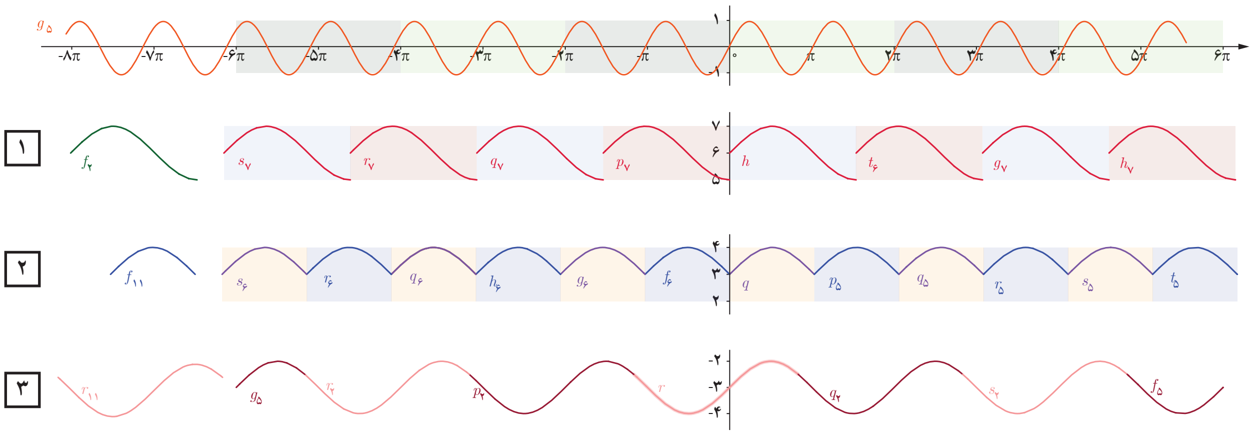
الف) به نظر شما در کدام ردیف‌ها نمودار تابع $y=\sin x$ بازسازی شده است؟ در این ردیف‌ها طول قطعه مربوطه چقدر است؟ آیا مکان بازه‌های مختلف در بازسازی نمودار تأثیر دارد؟

ب) آیا با قطعه‌ای به طول $\frac{\pi}{۲}$ می‌توان نمودار تابع $y=\sin x$ را بازسازی کرد؟

پ) آیا با قطعه‌های به طول $۲k\pi$ (kعددی صحیح مثبت) می‌توان نمودار تابع $y=\sin x$ را بازسازی کرد؟

ت) در مورد طول کوچک‌ترین قطعه‌ای از نمودار که با آن می‌توان نمودار را بازسازی کرد چه حدسی می‌زنید؟

۲ نمودار تابع $y=\sin 2x$ همراه با بازسازی‌های به‌دست آمده از چند قطعه مختلف آن در زیر آمده است.



الف) با کدام قطعات داده شده نمودار $y=\sin 2x$ بازسازی شده است؟ طول آنها چقدر است؟

ب) طول کوچک‌ترین بازه که با آن می‌توان نمودار تابع $y=\sin 2x$ را بازسازی کرد؟ چقدر است؟

پ) با توجه به الف و ب در رابطه زیر به جای c چه مقادیری می‌توان قرار داد تا تساوی برقرار شود؟ در مورد کوچک‌ترین مقدار c چه حدسی می‌زنید؟ (راهنمایی : با رابطه $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ مقایسه کنید).

$$\sin 2(x \pm c) = \sin 2x$$

در فعالیت قبل مشاهده شد که توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ به ترتیب در بازه‌های به طول $2k\pi$ $(k \in z)$ تکرار می‌شوند. به این‌گونه توابع «متناوب» گفته می‌شود. کوچک‌ترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است برای تابع $y=\sin x$ برابر 2π می‌باشد. واضح است که تابع $y=\sin x$ بر بازه‌هایی که طول آنها مضرب صحیحی از 2π است نیز تکرار می‌شوند. به این مقدار دوره تناوب تابع $y=\sin x$ گفته می‌شود و با نماد T نمایش می‌دهند. بنابراین تابع $y=\sin x$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ می‌باشد. همچنین تابع $y=\sin 2x$ نیز یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ است.

با توجه به تعریف فوق در ادامه نشان می‌دهیم که به‌طور کلی توابع $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$، $(a \neq 0)$ متناوب هستند و دوره تناوب آنها $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد زیرا :

$$\sin a(x \pm c) = \sin(ax \pm ac)$$

از طرفی با توجه به رابطه مثلثاتی $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ اگر داشته باشیم :

$$ac = 2\pi \rightarrow c = \frac{2\pi}{a}$$

آن‌گاه به‌دست می‌آید :

$$\sin a(x \pm c) = \sin(ax \pm ac) = \sin ax$$

پس بنا به تعریف فوق تابع $y=\sin ax$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

مشابه اثبات فوق را می‌توان برای $y=\cos ax$ نیز انجام داد.

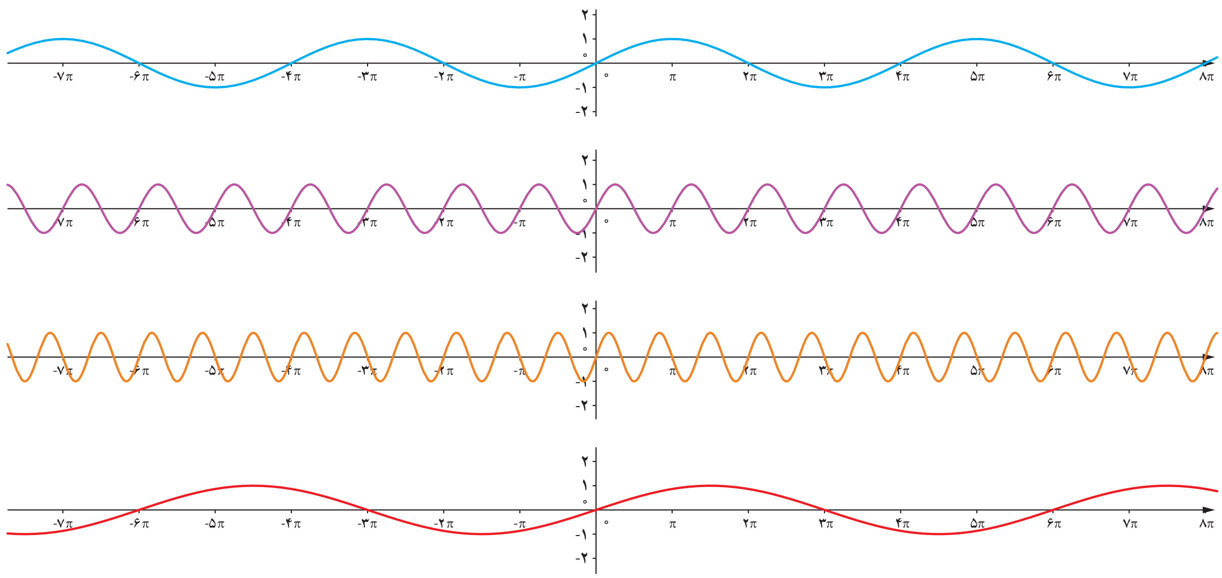
۳ تابع $y=\cos 2x$ را مانند فوق بررسی کنید.

کار در کلاس

۱ دوره تناوب هر یک ازتوابع زیر را به دست آورید.

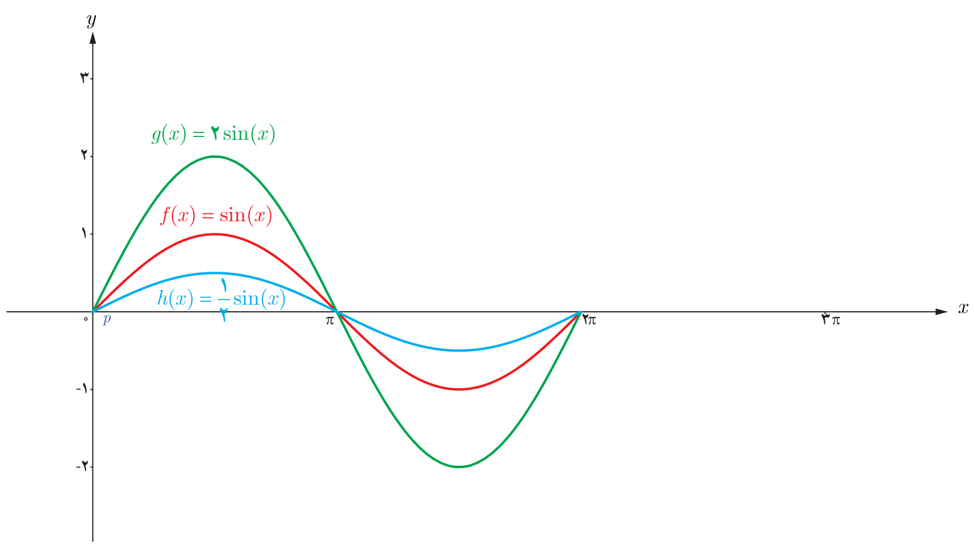
الف) $f(x)=\sin ۳x$ ب) $g(x)=\cos\sqrt{۲}x$ پ) $h(x)=\sin\frac{x}{۲}$ ت) $s(x)=\sin\pi x$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع $y=\sin x$ به صورت $x=k\pi$ که $k\in\mathbb{Z}$ می‌باشند. نمودار توابع $f(x)=\sin\frac{x}{۲}$، $g(x)=\sin ۲x$، $m(x)=\sin ۳x$ و $n(x)=-\sin\frac{x}{۳}$ در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های $y=\sin ax$ چه حدسی می‌زنید؟



۳ با توجه به دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع $f(x)=\sin x$، $g(x)=۲\sin x$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}\sin x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

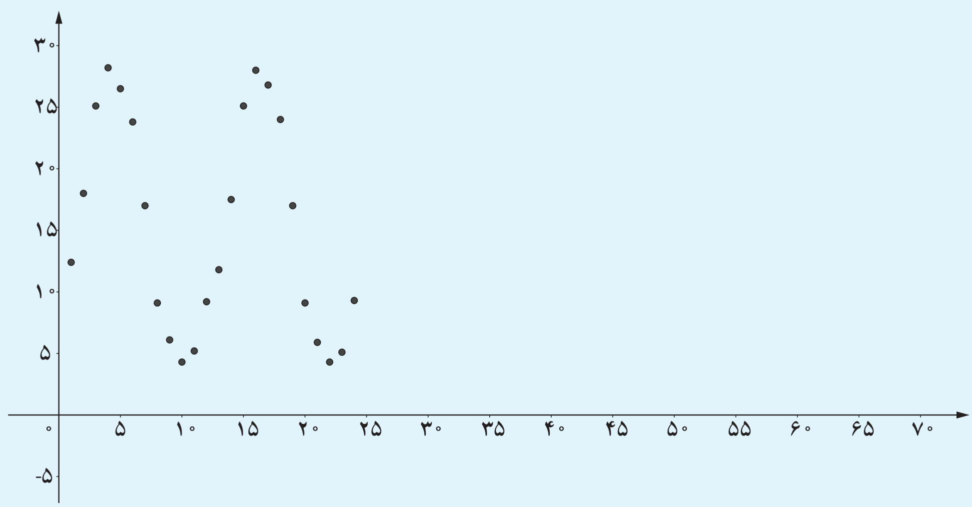
به‌طور کلی توابع مثلثاتی به‌صورت $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ که در آنها d، c، b، a اعداد حقیقی $(a,b\neq 0)$ می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

توابع متناوب[1] برای مدل سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به‌کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به‌دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

مثال ۱ : داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به‌صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

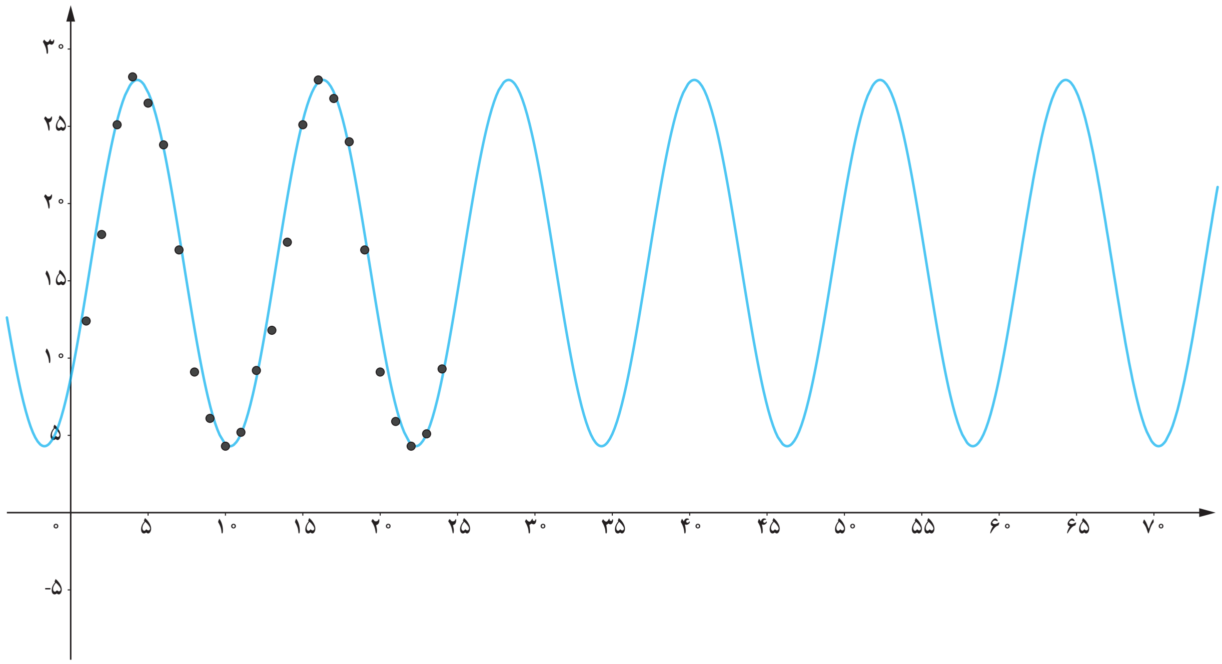
	داده‌های سال اول											
ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۲/۴	۱۸	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۵	۲۳/۸	۱۷	۹/۱	۶/۱	۴/۳	۵/۲	۹/۲

	داده‌های سال دوم											
ماه	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
دما	۱۱/۸	۱۷/۵	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۸	۲۴	۱۷	۹/۱	۵/۹	۴/۳	۵/۱	۹/۳



۱ــ در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به‌صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.

با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا $T=۱۲$ است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع $T(t)=۱۱/۸۵\sin(\frac{\pi}{۶}t)+۱۶/۱۵$ را که در آن t شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به‌دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به‌صورت $T(t)=a\sin(bt)+c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول c، b، a به‌صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دور تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم :

$$\frac{۲\pi}{b}=۱۲\to b=\frac{\pi}{۶}$$

برای به‌دست آوردن a که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت :

$$a=\frac{۲۸-۴/۳}{۲}=۱۱/۸۵$$

برای به‌دست آوردن مقدار c کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم :

$$c=\frac{۲۸+۴/۳}{۲}=۱۶/۱۵$$

مثال ۲ : مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به‌صورت $y=a\cos(bx)+c$ برای داده مناسب به‌نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

$$\frac{۲\pi}{b}=۱۲ \rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

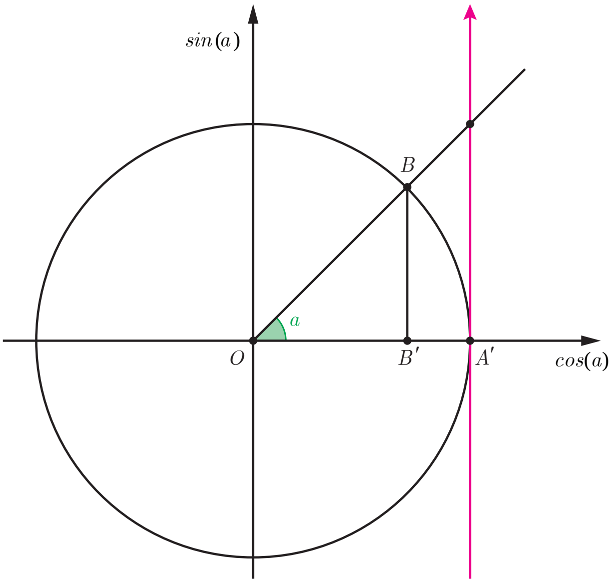
$$a=\frac{۲۸-۱۵}{۲}=۶/۵$$

$$c=\frac{۲۸+۱۵}{۲}=۲۱/۵$$

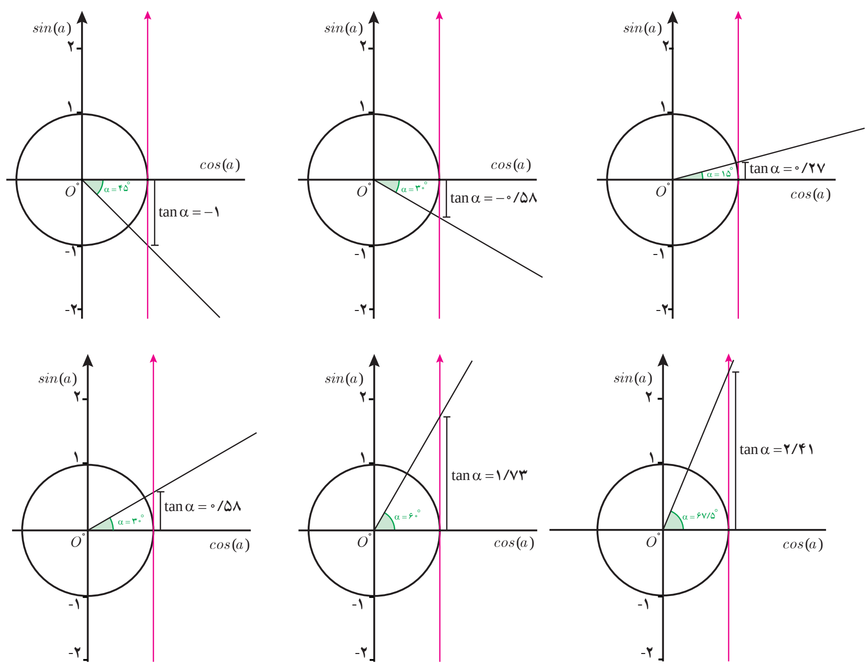
تابع تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه a و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط $x=۱$ را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده را رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطه A قطع کند آن‌گاه اندازه پاره خط AA' برابر تانژانت زاویه a می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OA'}=\frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA'=\frac{BB'}{OB'}=\tan\alpha.$$



از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه α در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که اندازه زاویه α به زاویه ۹۰° نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



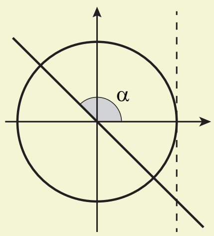
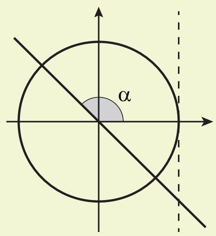
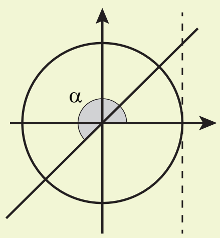
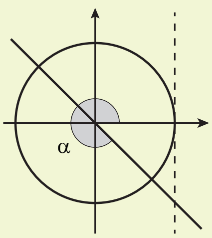
در فعالیت زیر تغییرات تابع $y=\tan\alpha$ را از $x=0$ تا $x=2\pi$ به کمک محور تانژانت نیز جدول مقادیر تانژانت که از سال‌های قبل فراگرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تانژانت را به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ در ردیف الف ازجدول زیر صعودی و نزولی بودن $\tan\alpha$ را با توجه به محور تانژانت در هر بازه تعیین نمایید.

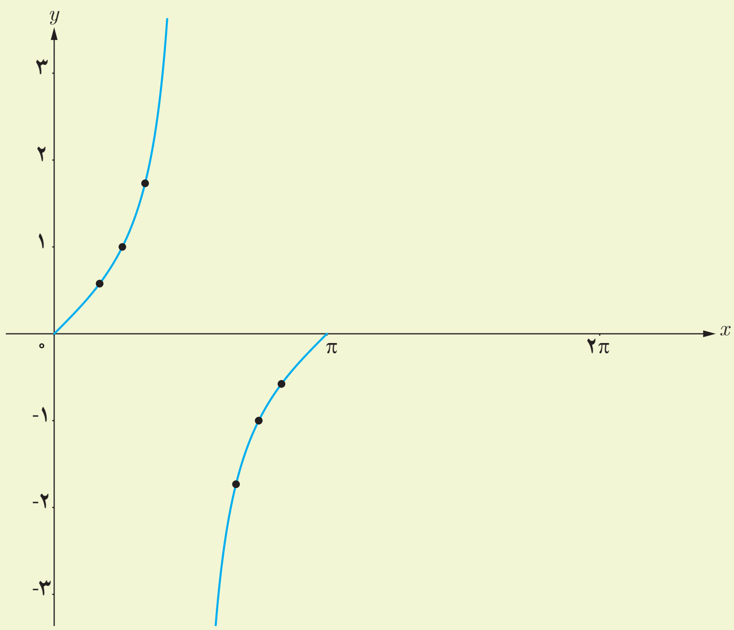
۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار $\tan\alpha$ را به ازای مقادیر داده شده از α به دست آورید ($\sqrt{3}=1/7$, $\frac{\sqrt{3}}{3}=0/58$).

۳ در ردیف پ نمودار تابع $y=\tan\alpha$ را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به‌دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

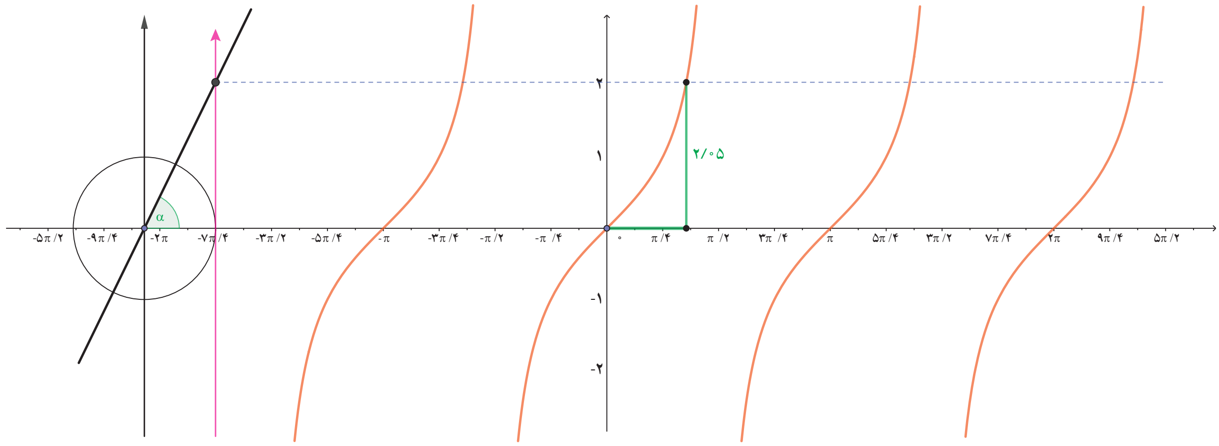
α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	π	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
الف	 صعودی						 ....

ب	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0	$0/58$												

پ



همان‌طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی $y=\tan\alpha$ برای مقادیر $\alpha' = \frac{k\pi}{2}$ تعریف می‌شود و نمودار آن در بازه $[-\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{4}]$ به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی که به موازات محورyها (محور سینوس) است را محور تانژانت می‌نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه α با آن محور بیانگر tanα است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



کار در کلاس

۱ آیا تابع $y=\tan x$ در بازه $[0,2\pi]$ یک‌نواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع $y=\tan x$ را به بازه‌های بزرگ‌تر از π و کوچک‌تر از $-\pi$ گسترش دهید. آیا تابع $y=\tan x$ متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$ دامنه و برد این تابع را بیابید.

تمرین

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=1+2\sin 7x$

ب) $y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x$

پ) $y=-\pi\sin\frac{1}{2}(x-2)$

ت) $y=-\pi+\sqrt{2}\tan 3x$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y=\sin \pi x$ ‎ ب) $y=2-\cos\frac{1}{2}x$ ‎ پ) $y=1-\cos 2x$

ت) $y=-\frac{1}{2}\tan 2x$ ‎ ث) $y=\sin 2x$ ‎ ج) $y=\tan\frac{1}{2}x$