

درس ۲

«ریشه nام و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و چگونگی کاربرد آنها در ریشه‌گیری دوم و سوم اعداد آشنا شده‌اید. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون در خصوص اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جای مناسب جدول قرار دهید (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند).

$$(-36)^y \div 9^y =$$

$$(2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-4} = (2/1)^{10}$$

$$(-4)^z \times (-5)^z =$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)^5 \div \left(\frac{4}{1}\right)^8 =$$

$$(10^6)^8 =$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-4} = (2/1)^{10}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$(-36)^y \div 9^y =$
$(a^m)^n = a^{mn}$	

ب) برای هر یک از رابطه‌های ستون اول جدول، مانند نمونه مثالی در ستون دوم جدول طرح و حل کنید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^7 \times 5^8 = 5^{7+8} = 5^{15}$
	$9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	
	$(2^2)^2 = 2^{2 \times 2} = 2^4$

۲. همان‌طور که می‌دانید اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارتی دیگر ریشه‌های دوم عدد a ، همان ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. به عنوان مثال ریشه‌های دوم عدد ۱۶، ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. به عنوان مثال ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می‌باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -۳۲، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر ——— و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند. جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد (a)	ریشه
۶۴	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$
-۶۴	چهارم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{a}$
$\sqrt[5]{-64}$	$\sqrt[5]{64}$
	پنجم
	$\sqrt[6]{a}$
	ششم
	$\sqrt[7]{a}$
	—————
	—————

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم، هرگاه: $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

کار در کلاس

۱. در حالت کلی‌تر دربارهٔ ریشه‌های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می‌توان گفت:

$a \geq 0$	n زوج باشد	a ام ریشه $= \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	a ام ریشه $= \sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	a ام ریشه $= \sqrt[n]{a}$

با توجه به جدول قبل، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی طرح و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

_____ و _____ = $-\sqrt[4]{25}$, $-\sqrt[4]{25}$ = ریشه ۸ام عدد ۲۵ $\Rightarrow a=25, n=8$: n زوج است و $a \geq 0$

$\Rightarrow n =$, $a =$: n فرد است و $a \geq 0$

$\Rightarrow n =$, $a =$: n زوج است و $a < 0$

$\Rightarrow n =$, $a =$: n فرد است و $a < 0$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است، یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین $\sqrt[5]{(-\frac{1}{3})^5} = -\frac{1}{3}$ و $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ ، همچنین $\sqrt[3]{(-15)^3} = -15$ و $\sqrt[4]{(15)^4} = 15$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل شرکت خواستند تا گزارشی در خصوص عملکرد شرکت طی سال‌های قبل جهت برنامه‌ریزی برای توسعه شرکت ارائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش، اعلام کرد که طی سال‌های قبل، شرکت دارای سود سالانه ۲۰ درصدی بوده و پیش‌بینی کرد این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند:

$$\text{زمان (بر حسب سال)}^t \times (1/2) = 100 \times \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}$$

به عنوان مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان به صورت زیر سرمایه شرکت را حساب کرد:

$$120 = 100 \times (1/2)^1 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)} : \text{پس از گذشت یک سال}$$

$$144 = 100 \times (1/2)^2 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)} : \text{پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، به عنوان مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد محاسبه کنند، چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تاکنون شما با توان‌های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید. اما در حل و مدل‌سازی خیلی از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویا است. در ادامه با مفهوم توان‌های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید:

فعالیت

۱. پدر محمد یک زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی محمد را با خود به محل کارش برد و به او زیر میکروسکوپ، نوعی باکتری را نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس از محمد خواست تا جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳		۵		۷	—	t
جرم (گرم)				$2^3 = 16$		$2^6 = 64$		—	2^t

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر باشیم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در زمان‌های کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ به عنوان مثال جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد: نظر خودت در مورد جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که $\frac{1}{2}$ گرم شود. اما مقدار $2^{\frac{1}{2}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود، چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد: اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت جرم باکتری‌ها a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می‌شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$ (زیرا a مثبت است). بنابراین پس از نیم ساعت، جرم باکتری‌ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم؟
معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2^b \times 2^b = 2 \Rightarrow 2^{b+b} = 2 \Rightarrow 2^{2b} = 2^1 \Rightarrow$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ (۱)

پس جرم باکتری ها پس از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست بود. حالا بعد از پانزده دقیقه جرم باکتری ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.
حالا شما مانند محمد جرم باکتری ها را در زمان های داده شده به دست آورید.

$$= \text{پس از } 20 \text{ دقیقه (— ساعت)} = \sqrt[4]{2} = \text{پس از } 10 \text{ دقیقه } (\frac{1}{6} \text{ ساعت})$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی کنیم. به عنوان مثال، عبارت هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی کنیم.
همچنین هر جا عبارات $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می شود، a را عددی مثبت در نظر می گیریم.

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

۲. در خصوص توان های صحیح اعداد دیدید که:

در مورد توان های گویای اعداد نیز می توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\sqrt[4]{7^5} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

و به طور کلی داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

بنابراین $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به صورت مقابل تعریف می شود:

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{3}{4}} =$$

$$6^{\frac{7}{9}} =$$

$$12^{-\frac{2}{11}} =$$

$$\left(2 \frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$(0.001)^{\frac{15}{3}} =$$

روابطی که در ابتدای درس در خصوص توان های صحیح اعداد یادآوری شد، در خصوص توان های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارات رادیکالی را به صورت عبارت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{4}} =$$

$$7^{\frac{1}{8}} =$$

$$\sqrt[3]{25} =$$

$$\sqrt[4]{2/7} =$$

$$(0.31)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[4]{6} =$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$6 \text{ ماه } \left(\frac{1}{4}\right) \text{ سال بعد} : 1000 \times (1/4)^{\frac{1}{2}} = 1000 \times \sqrt{1/4}$$

۳ سال و ۶ ماه بعد :

۲۰۰ روز بعد :

۱ سال و ۲ ماه بعد :

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$125^{\frac{1}{3}} =$$

$$1000^{\frac{1}{2}} =$$

$$325^{\frac{1}{5}} =$$

۴. هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} =$$

$$-4(1000)^{\frac{1}{3}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} =$$

$$125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{4}} =$$

$$8^{\frac{2}{7}} \times (1/5)^{\frac{2}{7}} =$$

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است؟

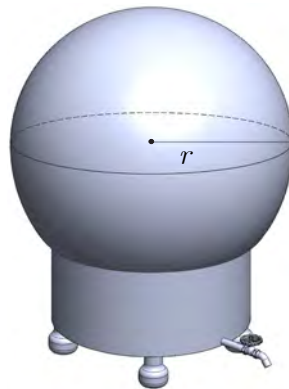
تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[4]{5^3}$ با هم برابرند.

۲. همان‌طور که می‌دانید حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (v حجم کره) به دست می‌آید. الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول روبه‌رو به دست آورد؟

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ب) شعاع تانکر کره‌ای شکل که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است را به دست آورید.



۳. حاصل هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید (a, b, m, n اعداد حقیقی مثبت و مخالف صفر هستند).

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} =$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

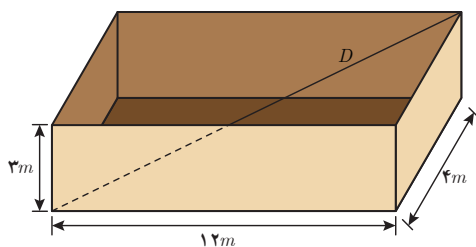
$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} =$$

$$3^{0/26} \times 3^{0/74} =$$

$$(m^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} =$$

۴. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به دست می‌آید.



الف) با توجه به شکل اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.