درس ۲

«ریشه nام و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و چگونگی کاربرد آنها در ریشه‌گیری دوم و سوم اعداد آشنا شده‌اید.
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون در خصوص اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحوهٔ محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جای مناسب جدول قرار دهید (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند).

$(۲/۱)^{۶}\times(\frac{۲۱}{۱۰})\times(۲\frac{۱}{۱۰})^{۴}=(۲/۱)^{۱۱}$ $\qquad$ $(-۳۶)^{۷}\div ۹^{۷}=$

$(۱۰^{۶})^{۸}=$ $\qquad$ $(\frac{۴}{۷})^{۵}\div(\frac{۴}{۷})^{۸}=$ $\qquad$ $(-۴)^{۳}\times(-۵)^{۳}=$

$(۲/۱)^{۶}\times(\frac{۲۱}{۱۰})\times(۲\frac{۱}{۱۰})^{۴}=(۲/۱)^{۱۱}$	$a^{m}.\ a^{n}=a^{m+n}$
	$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$
	$a^{m}.\ b^{m}=(ab)^{m}$
$(-۳۶)^{۷}\div ۹^{۷}=$	$\frac{a^{m}}{b^{m}}=(\frac{a}{b})^{m}$
	$(a^{m})^{n}=a^{mn}$

ب) برای هر یک از رابطه‌های ستون اول جدول، مانند نمونه مثالی در ستون دوم جدول طرح و حل کنید.

$۵^{۷} \times ۵^{۸} = ۵^{۷+۸} = ۵^{۱۵}$	$a^m .\ a^n = a^{m+n}$
$۹^{۱۰} \div ۹^{۶} = ۹^{۱۰-۶} = ۹^{۴}$	
	$a^m .\ b^m = (ab)^m$
	$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$
$(۲^{۳})^{۴} = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$	

۲. همان‌طور که می‌دانید اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارتی دیگر ریشه‌های دوم عدد a، همان ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2 = a$ هستند. به عنوان مثال ریشه‌های دوم عدد ۱۶، ریشه‌های معادلهٔ $x^2 = ۱۶$ می‌باشند و چون $۱۶=۴^۲$ و $۱۶=(-۴)^۲$، پس ۴ و ۴- یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین ریشه سوم عدد حقیقی مانند a، ریشهٔ معادلهٔ $x^3 = a$ است. به عنوان مثال ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادلهٔ $x^3=۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد.

با همین استدلال، ریشه پنجم عدد ۳۲-، پاسخ معادله $x^5=-۳۲$ است که برابر ـــــــ و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادلهٔ $x^6=$ ـــــ هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند.

جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد (a) / ریشه	۶۴	۶۴-
چهارم	$\sqrt[۴]{۶۴}\ ,\ -\sqrt[۴]{۶۴}$	
$\sqrt[۴]{a}$		وجود ندارد
پنجم	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{-۶۴}$
$\sqrt[۵]{a}$		
ششم		
$\sqrt[۶]{a}$		
ـــــــ		
ـــــــ		

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nام عدد a می‌نامیم، هرگاه : $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشهٔ nام مثبت عدد a است.

کار در کلاس

۱. در حالت کلی‌تر دربارهٔ ریشه‌های nام $(n \in \mathbb{N})$ عددی مانند a می‌توان گفت :

$\sqrt[n]{a}\ ,\ -\sqrt[n]{a}$ = ریشه nام a	n زوج باشد	$a \geq ۰$
$\sqrt[n]{a}$ = ریشه nام a	n فرد باشد	
ریشه ندارد	n زوج باشد	$a < ۰$
$\sqrt[n]{a}$ = ریشه nام a	n فرد باشد	

با توجه به جدول قبل، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی طرح و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

$a \geq ۰$ و n زوج است : $a = ۲۵, n = ۸ \Rightarrow$ ریشهٔ ۸ام عدد ۲۵ = $\sqrt[۸]{۲۵}\ ,\ -\sqrt[۸]{۲۵}$ = ——— و – ———

$a \geq ۰$ و n فرد است : $a = \quad , n = \Rightarrow$

$a < ۰$ و n زوج است : $a = \quad , n = \Rightarrow$

$a < ۰$ و n فرد است : $a = \quad , n = \Rightarrow$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^۲} = |a|$ و $\sqrt[۳]{a^۳} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq ۲$ برقرار است، یعنی :

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج است } n \\ a & \text{فرد باشد } n \end{cases}$$

بنابراین $\sqrt[۱۰]{(-۱۵)^{۱۰}} = |-۱۵| = ۱۵$ و $\sqrt[۵]{(-\frac{۸}{۳})^۵} = -\frac{۸}{۳}$ ، همچنین ——— = $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}$ و $\sqrt[۱۲]{(\square)^{۱۲}} =$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی از مدیر عامل شرکت خواستند تا گزارشی در خصوص عملکرد شرکت طی سال‌های قبل جهت برنامه‌ریزی برای توسعهٔ شرکت ارائه کند. مدیرعامل در جلسهٔ ارائه گزارش، اعلام کرد که طی سال‌های قبل، شرکت دارای سود سالانهٔ ۲۰ درصدی بوده و پیش‌بینی کرد این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانهٔ آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند:

سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{t}$ زمان (برحسب سال)

به عنوان مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان به‌صورت زیر سرمایه شرکت را حساب کرد:

پس از گذشت یک سال: سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{۱}=۱۲۰$

پس از گذشت ۲ سال: سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{۲}=۱۴۴$

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، به عنوان مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد محاسبه کنند، چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تاکنون شما با توان‌های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید. اما در حل و مدل‌سازی خیلی از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویا است. در ادامه با مفهوم توان‌های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید:

فعالیت

۱. پدر محمد یک زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی محمد را با خود به محل کارش برد و به او زیر میکروسکوپ، نوعی باکتری را نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس از محمد خواست تا جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳		۵		۷	___	t
جرم (گرم)				$۲^{۴}=۱۶$		$۲^{۶}=۶۴$		___	۲^{t}

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر باشیم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در زمان‌های کمتر از یک ساعت به‌دست آوریم؟ به عنوان مثال جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد: نظر خودت در مورد جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که ــــ گرم شود. اما مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود، چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت جرم باکتری‌ها a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a\times a=a^{۲}$ می‌شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^{۲}=۲$ یعنی $a=\sqrt{۲}$ (زیرا a مثبت است). بنابراین پس از نیم ساعت، جرم باکتری‌ها $\sqrt{۲}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به‌صورت توانی از ۲ بنویسیم؟

معادله $\sqrt{۲} = ۲^b$ را در نظر می‌گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به‌دست آوریم.

$\sqrt{۲} = ۲^b \Rightarrow \sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲^b \times ۲^b = ۲ \Rightarrow ۲^{b+b} = ۲ \Rightarrow ۲^{۲b} = ۲^۱ \Rightarrow$

$۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$

بنابراین داریم : $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$ (۱)

پس جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت ($\frac{۱}{۲}$ ساعت)، $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست بود. حالا بعد از پانزده دقیقه جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد : چون پانزده دقیقه، $\frac{۱}{۴}$ ساعت است پس $۲^{\frac{۱}{۴}}$ گرم یا $\sqrt[۴]{۲}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

= پس از ۲۰ دقیقه (ـــ ساعت) $= \sqrt[۳]{۲}$ = پس از ۱۰ دقیقه ($\frac{۱}{۶}$ ساعت)

> برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می کنیم :
>
> $$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < ۰$ ، $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. به عنوان مثال، عبارت‌هایی مانند $(-۲)^{\frac{۱}{۲}}$ و $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ را تعریف نمی‌کنیم.

همچنین هرجا عبارات $a^{\frac{۱}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که : $۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

در مورد توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم :

$$۷^{\frac{۵}{۴}} = ۷^{۵\times\frac{۱}{۴}} = (۷^۵)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۷^۵}$$

$$۳^{\frac{۲}{۳}} = ۳^{۲\times\frac{۱}{۳}} = (۳^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۳^۲}$$

و به‌طور کلی داریم :

> هرگاه $a > ۰$، برای دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم :
>
> $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
>
> اگر $a > ۰$ و m و n دو عدد طبیعی $a^{\frac{m}{n}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :
>
> $$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^m = (a^m)^{\frac{۱}{n}}$$
>
> بنابراین $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به‌صورت مقابل تعریف می‌شود :
>
> $$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$۵^{\frac{۳}{۴}} =$ $\qquad$ $۶^{\frac{۷}{۹}} =$ $\qquad$ $۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} =$

$(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} =$ $\qquad$ $(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۵}{۳}} =$

روابطی که در ابتدای درس درخصوص توان های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارات رادیکالی را به‌صورت عبارت توان‌دار بنویسید.

$۳^{\frac{۱}{۴}} =$ $\qquad$ $۷^{\frac{۱}{۸}} =$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲۵} =$

$\sqrt[۱۲]{۲/۷} =$ $\qquad$ $(۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}} =$ $\qquad$ $\sqrt[۱۰]{۱} =$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید.

۶ماه ($\frac{۱}{۲}$ سال) بعد : $۱۰۰۰ \times (۱/۰۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰۰ \times \sqrt{۱/۰۲}$

۳سال و ۶ ماه بعد :

۲۰۰ روز بعد :

۱ سال و ۲ ماه بعد :

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان‌دار زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۲$ $\qquad$ $۱۲۵^{\frac{۱}{۳}} =$

$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}} =$ $\qquad$ $۳۲^{\frac{۱}{۵}} =$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$(۲\times۸)^{\frac{۱}{۴}} =$ $\qquad$ $-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}} =$

$۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} =$ $\qquad$ $۷^{\frac{۳}{۴}} \times ۷^{\frac{۵}{۴}} =$

$۱۲۵^{\frac{۲}{۳}} \div ۱۲۵^{\frac{۱}{۴}} =$ $\qquad$ $۸^{\frac{۲}{۷}} \times (۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} =$

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[۳]{-۸}$ را به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[۳]{-۸}$ به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نادرست است؟

تمرین

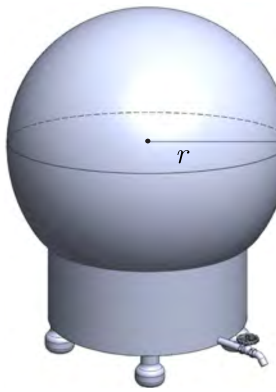
۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt[۴]{۵^۲}$ ، $\sqrt[۴]{۵^۳}$ با هم برابرند.

۲. همان‌طور که می‌دانید حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ (v حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول روبه‌رو به‌دست آورد؟

$$r=(\frac{۳v}{۴\pi})^{\frac{۱}{۳}}$$

ب) شعاع تانکر کره‌ای شکل که حجم آن $\frac{۳۲\pi}{۳}$ است را به‌دست آورید.



۳. حاصل هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید (a، b، m و n اعداد حقیقی مثبت و مخالف صفر هستند).

$(۲^۶)^{\frac{۱}{۳}}=$ $\quad$ $۸^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=$ $\quad$ $۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{(-\frac{۱}{۴})}=$ $\quad$ $۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}=$

$(m^{\frac{۱}{۴}}.n^{\frac{۱}{۲}})^۲(m^۲n^۳)^{\frac{۱}{۲}}=$ $\quad$ $۳^{۰/۲۶}\times ۳^{۰/۷۴}=$ $\quad$ $(\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}})^{-۴}=$ $\quad$ $(\frac{۳^۴}{۲^۶})^{\frac{۱}{۲}}=$

۴. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازهٔ آن از طریق تابع $D=(L^۲+W^۲+H^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل اندازه D را به‌دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=۱\,m$ باشد، اندازه D را به‌دست آورید.