

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی

درس ۱

توان های گویا

درس ۲

تابع نمایی

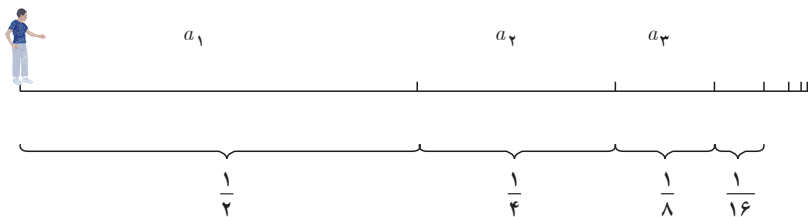
درس ۳

درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروزمان و شنیدن صدای زنگ تفریح هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی زنون^۲ بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد که به پارادکس زنون معروف است. او چنین استدلالی کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند برای همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهیم رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین هستند اما هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود. به بیانی دیگر اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ و... نیاز داریم پس:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله t و $\frac{t}{2}$ و $\frac{t}{4}$ ، هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند پس T از مجموع بی‌نهایت جمله تشکیل شده است، از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا پاسخ قطعی به این تناقض داده شود^۳. حل این مسئله به ایجاد شاخه‌ای در ریاضی به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس به بیان برخی از مفاهیم آن خواهیم پرداخت. با بیان این مفاهیم نگرانی شما نیز حل خواهد شد و مشخص می‌کنیم که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

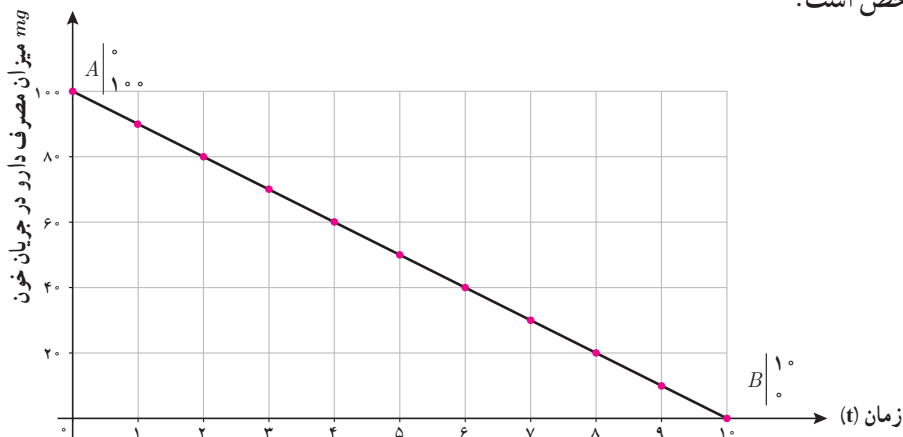
۱- Geometric Sequences

۲- Zeno

۳- در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال آن کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش توسط ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور و برونکور، نیوتن و اویلر از اواخر قرن هفده شروع شده بود نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان طور که در فعالیت صفحه — گفته شده پس از مصرف برخی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعت ثابتی از خون حذف می‌شوند. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف 100° میلی‌گرم از داروی A ، در هر ساعت 1° میلی‌گرم آن را حذف کند نمایش دنباله نزولی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون شخص است.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص، n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش هر 1° میلی‌گرم در بدن شخص در I هر ساعت:

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = a_n - 10$$

پس برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m = AB \text{ شیب خط} = \frac{0 - 100}{10 - 0} = -10$$

$$h = 100 \text{ عرض از مبدأ} = 100 \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

و یا به کمک رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی رابطه):

$$a_1 = 100 \quad \text{کاهش ثابت } 10 \text{ mg} \quad d = -10 \quad \text{میزان دارو در بدن پس از یک ساعت}$$

در هر یک ساعت پس از مصرف دارو

$$\Rightarrow a_n = 100 + (n-1) \times (-10) \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

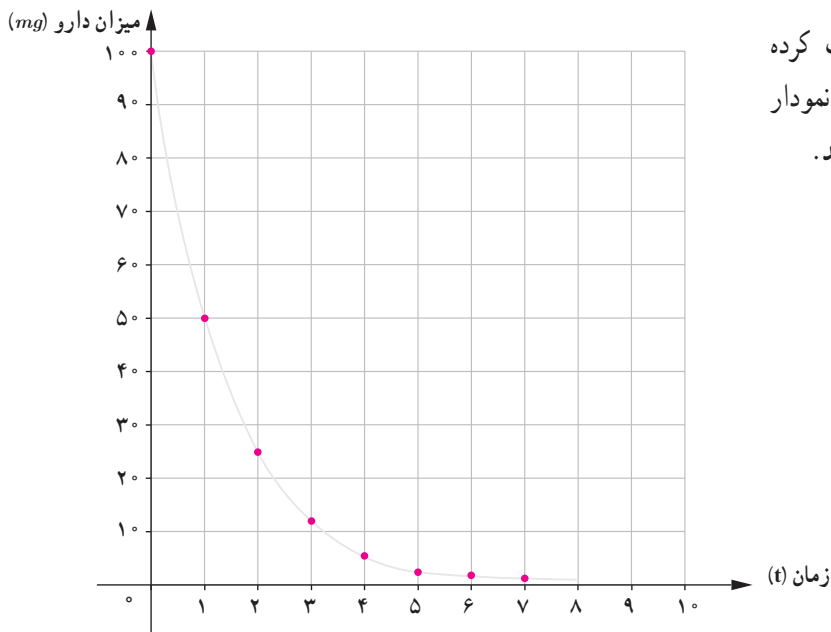
میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً مانند مثال بالا با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود و در درصد بالایی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می‌یابد^۱.

نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان

مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

۱- اثر این دارو را First zero kinetics می‌نامند.

فعالیت



شخصی 100 میلی‌گرم دارویی را مصرف کرده است که نیمه عمر آن یک ساعت است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر کمتر از 20 میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان اولیه دارو پس از مصرف در بدن شخص و a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت — در جمله پیشین به دست می‌آید یعنی:

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 100 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 100 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 100 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 100 \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \times 100$$

خواندنی

دانستن نیمه‌عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

— در درمان بیماری‌های عفونی آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

— در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون دارو در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

— کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و

دارو در خون شخص از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله دنباله از ضرب یک عدد ثابت در جمله پیشین به دست می‌آید دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنباله هندسی دنباله‌ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن a جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}an$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$			
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$		$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)an$ $a_1 = 4$	
		$5, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$		
				$a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

– اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n افزایشی کاهشی است.

– اگر $r > 1$ ، دنباله a_n افزایشی کاهشی است.

– اگر $r = 1$...

۱. Common ratio

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots را مشخص کنید.

کار در کلاس

(هزینه استهلاک)^۱ — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان برای منزلش خریده است. هزینه استهلاک این یخچال فریزر هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر هر سال ۹۰٪ سال قبلش خواهد بود یعنی:

$$v_1 = 960/000 \qquad v_2 = 960/000 \times \frac{90}{100} = \dots \qquad v_3 = \dots$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟ با توجه به آنکه ارزش یخچال فریزر در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد هر چقدر ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله بخواهیم یخچال فریزر را زمان بفروشیم که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشیم؟

با توجه به قیمت خرید اولیه ۹۶۰ هزار، نصف ارزش یخچال فریزر ۴۸۰ هزار است که با توجه به خواست مسئله باید نخستین عدد n که نامساوی $v_n < 480/000$ را تأمین می‌کند مشخص کنیم. بنابراین ...

ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج تفاوت حالتی که از جمله اول دنباله در هر مرحله k واحد کسر شود با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

مثال حل شده

در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر $\frac{1}{4}$ و جمله ششم برابر ۴ است. جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید.
با توجه به رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ برای یافتن جمله عمومی دنباله باید r (نسبت مشترک) و a_1 را مشخص کنیم. با توجه به اطلاعات مسئله:

$$\begin{cases} a_3 = \frac{1}{4} \\ a_6 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{4} \\ a_6 = \dots = 4 \end{cases}$$

با تقسیم $\frac{a_6}{a_3}$ به ترتیب مقادیر r و سپس a_1 به دست می‌آید:

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = r^3 = \frac{4}{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

حال با توجه به رابطه $a_3 = a_1 r^2$ و جای گذاری مقادیر $r=2$ و $a_3 = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = 4 \times a_1 \Rightarrow a_1 = \dots$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{n-4}$$

پس:

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دو نوشیدنی باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی در افراد می‌شود. تمامی این تأثیرها به‌خاطر وجود مادهٔ کافئین در آنها است. نکتهٔ مهم آن است که همان‌طور که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است وارد شدن بیش از اندازهٔ کافئین در بدن منجر به اضطراب، تپش قلب بی‌خوابی و... می‌گردد. همچنین، مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند تا جایی که عدم مصرف این نوشیدنی‌ها باعث سردرد و... می‌شود. یکی از دلایلی که عموماً پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه در کودکان توصیه می‌کنند ایجاد همین وابستگی و اثرات منفی ناشی از نوشیدن بیش از اندازهٔ آنها است. توجه به نیمه‌عمر مادهٔ کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده نیمه‌عمر مادهٔ کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد پس از چند نیمه‌عمر یا پس از چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن آنکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۵/۰ میلی‌گرم باشد هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود)

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوع گلودرد عفونی است پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل 8° میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به آنکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است و شخص بیمار موظف به مصرف این قرص‌ها در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین است.

- الف) با کامل کردن جدول زیر میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ج) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان تعداد مصرف قرص و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)
 د) با جای‌گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n
۱	۱۵ بهمن	۰۱:۰۰:۰۰ بامداد	$S_1 = 8^\circ mg$
۲	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + 8^\circ = 4^\circ + 8^\circ = 12^\circ$
۳	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + 8^\circ = 6^\circ + 8^\circ =$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \text{---} + 8^\circ = \text{---}$
۵	۱۶ بهمن	---	$S_5 = \text{---} = \text{---}$
۶	---	---	$S_6 = \text{---} + \text{---} =$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1} = \text{---} + \frac{1}{4} S_n, \quad S_1 = \text{---}$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A^{mg} در نظر بگیریم (در این مسئله $A = 8^\circ mg$ است) با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب :

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4} S_1 = \dots$$

$$S_3 = \dots + \dots = A + \frac{1}{4} (A + \frac{1}{4} A) = A + \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A$$

به همین صورت برای محاسبه S_∞ :

$$S_\infty = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم :

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \dots + \dots + \dots \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید :

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

بنابراین با فرض این مسئله $A = 160 \text{ mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120 \quad S_2 = \dots \quad S_\infty = \dots$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم :

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه :

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

الف) مقادیر a و r را در فعالیت صفحه پیش مشخص کنید.

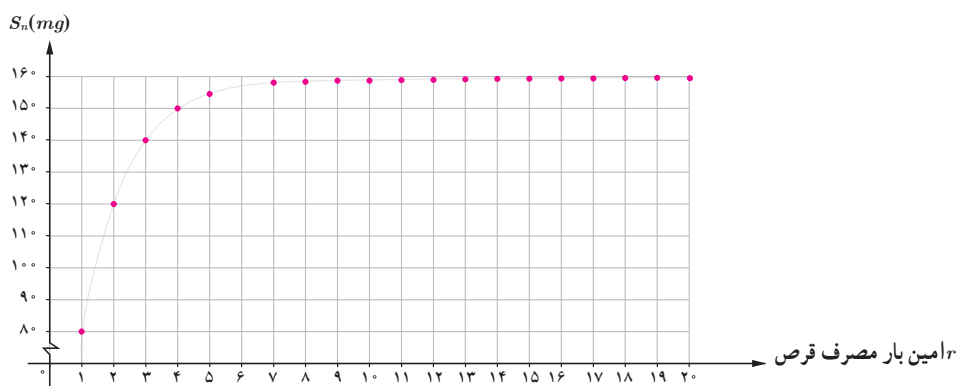
ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنی a_n و S_n چیست؟

کار در کلاس

اگر در فعالیت صفحه پیش به دلایلی، شخص بیمار مجبور به مصرف قرص آنتی بیوتیک به مدت نامحدود باشد و با استفاده از جدول و نمودار زیر که میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را در طول بیست بار مصرف دارو مشخص کرده است:

n تعداد مصرف	S_n
$n=6$	$S_6 = 157/5$
$n=7$	$S_7 = \frac{1}{4}S_6 + 80 = 158/75$
$n=8$	$S_8 = \frac{1}{4}S_7 + 80 = 159/375$
$n=9$	$S_9 = \frac{1}{4}S_8 + 80 = 159/6875$
$n=10$	$S_{10} = \frac{1}{4}S_9 + 80 = 159/8437$
$n=11$	$S_{11} = \frac{1}{4}S_{10} + 80 = 159/9218$
$n=12$	$S_{12} = \frac{1}{4}S_{11} + 80 = 159/9609$

n تعداد مصرف	S_n
$n=13$	$S_{13} = \frac{1}{4}S_{12} + 80 = 159/9804$
$n=14$	$S_{14} = \frac{1}{4}S_{13} + 80 = 159/9902$
$n=15$	$S_{15} = \frac{1}{4}S_{14} + 80 = 159/9951$
$n=16$	$S_{16} = \frac{1}{4}S_{15} + 80 = 159/9975$
$n=17$	$S_{17} = \frac{1}{4}S_{16} + 80 = 159/9987$
$n=18$	$S_{18} = \frac{1}{4}S_{17} + 80 = 159/9993$
$n=19$	$S_{19} = \frac{1}{4}S_{18} + 80 = 159/9996$
$n=20$	$S_{20} = \frac{1}{4}S_{19} + 80 = 159/9998$



الف) جملات دنباله S_n افزایش می یابد یا کاهش؟ کدام دو جمله متوالی S_n بیشترین اختلاف را دارند؟ کدام دو جمله کمترین اختلاف را دارند؟ چرا؟

ب) آیا با افزایش تعداد دفعات مصرف دارو، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن بیمار به عدد ثابتی نزدیک می شود؟

ج) با استفاده از رابطه به دست آمده $S_n = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ چگونه می توان حدس قسمت ب را بررسی کرد؟ با افزایش n ، مقادیر دنباله $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ چگونه بر مقادیر دنباله S_n تأثیر می گذارد؟

الف) با توجه به جدول نمودار S_n ، با افزایش n جملات دنباله S_n می‌یابند. مطابق جدول جملات و بیشترین اختلاف را دارند و میزان این اختلاف میلی گرم است.

اگر بیمار بیست قرص مصرف کرده باشد جملات و کمترین اختلاف را دارند که این میزان $S_{\dots} = S_{\dots}$ است که از تفاضل هر دو جمله متوالی دیگر کمتر است.

ب) جملات و نمودار S_n ظاهراً نشان می‌دهند که با افزایش مصرف قرص میزان آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار به میلی گرم نزدیک می‌شود و از این مقدار افزایش نمی‌یابد.

ج) برای حدس قسمت ب، با جدول زیر را به کمک ماشین حساب کامل می‌کنیم:

n تعداد مصرف	$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$	$*s_n = 160\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$	$160 - S_n$
$n=6$	$a_6 = 0/015625$	$S_6 = 157/5$	$2/5$
$n=7$	$a_7 = 0/00781$	$S_7 = 158/75$	$1/25$
$n=8$	$a_8 = \text{-----}$	$S_8 = \text{-----}$	$0/625$
$n=9$	$a_9 = \text{-----}$	$S_9 = \text{-----}$	-----
$n=10$	$a_{10} = \text{-----}$	$S_{10} = \text{-----}$	-----
$n=11$	$a_{11} = \text{-----}$	$S_{11} = \text{-----}$	-----
$n=12$	$a_{12} = \text{-----}$	$S_{12} = \text{-----}$	-----
$n=13$	$a_{13} = \text{-----}$	$S_{13} = \text{-----}$	-----
$n=14$	$a_{14} = \text{-----}$	$S_{14} = \text{-----}$	-----
$n=15$	$a_{15} = \text{-----}$	$S_{15} = \text{-----}$	-----
$n=16$	$a_{16} = \text{-----}$	$S_{16} = \text{-----}$	-----
$n=17$	$a_{17} = \text{-----}$	$S_{17} = \text{-----}$	-----
$n=18$	$a_{18} = 0/000003$	$S_{18} = 159/9993$	$0/0007$
$n=19$	$a_{19} = 0/000001$	$S_{19} = 159/9996$	$0/0004$
$n=20$	$a_{20} = 0/0000009$	$S_{20} = 159/9998$	$0/0002$

- با توجه به مصرف تنها 20 بار دارو کاملاً مشخص است که اگر بیمار تعداد مصرف دارو را به 50 یا 100 یا ... افزایش دهد:
- جملات دنباله a_n کاهش پیدا می‌کند و به نزدیک می‌شوند.
 - جملات دنباله S_n و به می‌شود.
 - اختلاف S_n ها با عدد ثابت 160 mg و به نزدیک می‌شود.

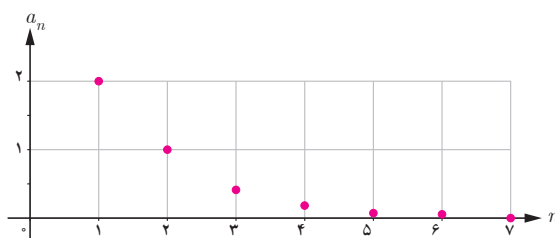
بنابراین، برای تعیین میزان آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار، که پس از n بار مصرف دارو از رابطه $S_n = 160(1 - (\frac{1}{3})^n)$ به دست می‌آید، زمانی که n عدد بزرگی است (به ویژه زمانی که n تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند) به دلیل کوچک بودن مقدار دنباله $a_n = (\frac{1}{3})^n$ می‌توانیم از آن صرف نظر کنیم و میزان آنتی‌بیوتیک را 160 میلی‌گرم در نظر بگیریم. بدیهی است که هر چقدر عدد n افزایش یابد مطابق محاسبات بالا S_n به مقدار 160 نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده کنید).

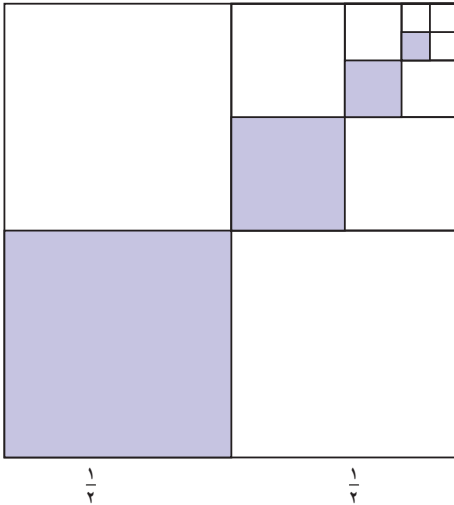
	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \dots$ $\times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3}$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} =$
$B = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ $\times \frac{1}{4}$	$a_1 =$ _____	$r =$ _____	$S_4 =$ $S_8 =$
$C = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots$	$a_1 =$ _____	$r =$ _____	$S_7 =$ $S_{14} =$

۲. با توجه به نمودار زیر و ادامه روند جملات دنباله مطابق شکل زیر حاصل S_4 و S_7 را به دست آورید.



مثال حل شده

پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربعات باقی مانده مربعی که ضلع مشترک با مربع رنگ آمیزی شده ندارد را انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، با رأس مشترک با مربع رنگ شده را رنگ آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های رنگ شده مربعات، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های رنگ شده از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

ج) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

الف) با توجه به آنکه مطابق فرض مسئله در هر مرحله $\dots\dots$ درصد از مربع رنگ می‌شود دنباله مساحت‌های رنگ شده تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. این مطلب را با نوشتن جملات دنباله نیز می‌توان دید زیرا:

$$a_1 = \text{مساحت رنگ شده در اولین مرحله نخست} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \text{مساحت رنگ شده در مرحله دوم} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$a_3 = \text{مساحت رنگ شده در مرحله سوم} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$$

که می‌توان مشاهده کرد که هر جمله از ضرب $\dots\dots$ در جمله پیشین به دست می‌آید.
ب) به کمک رابطه به دست آمده برای محاسبه مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

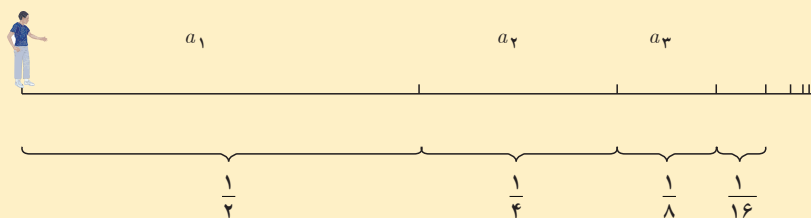
و در نظر گرفتن $a_1 = \frac{1}{4}$ و $r = \frac{1}{4}$ ، مجموع n جمله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \dots\dots\dots$$

ج) با در نظر گرفتن $n=6$ در رابطه به دست آمده از قسمت ب):

$$S_6 = \dots\dots\dots$$

جواب پارادکس زنو



همان طور که خوانده شد مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد همچنان که در کار در کلاس صفحه دیده شد مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم از آن در حالتی که مجموع بی شمار و مقدار جملات دنباله هندسی خواسته می شود صرف نظر کنیم بنابراین :

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

است.

حال یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از رابطه

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

به دست آید، در واقع جملات مجموعه بالا شامل بی شمار دنباله هندسی که نسبت مشترک آنها برابر $\frac{1}{2}$ است بنابراین :

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots = \frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2t$$

چون n تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بینهایت بسیار بسیار ناچیز است از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف نظر نمود. یعنی :

$$\frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t(1 - \cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

به دست می آید یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید با فرض ثابت بودن سرعت شما : بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت در $2t$ ثانیه طی می شود.

در واقع اشتباه استدلال زنو آن بود که می پنداشت اگر بی نهایت جمله با یکدیگر جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود!

تمرین

۱. جاهای خالی را پر کنید.

(الف) یک دنباله هندسی دنباله‌ای است که جملات متوالی دنباله ثابت است.

(ب) اگر a_m و a_n جملات m ام و n ام یک دنباله هندسی باشند حاصل $\frac{a_m}{a_n}$ برابر $r \times$ است.

(ج) اگر نسبت مشترک میان جملات یک دنباله هندسی باشد جملات دنباله کاهش می‌یابد و به نزدیک می‌شوند.

(د) مجموعه n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = \dots$ به دست می‌آید.

۲. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$۱) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad ۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1 \quad ۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و $3x$ جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند مقدار x را به دست آورید.

۴. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن‌گاه $a \times c = b^2$ (را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند)

۵. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلو گرم است پس از ورود به جو زمین در هر دقیقه ۱۵٪ از وزن آن به خاطر تماس با جو زمین از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود به جو زمین چقدر از وزن شهاب سنگ باقی می‌ماند؟

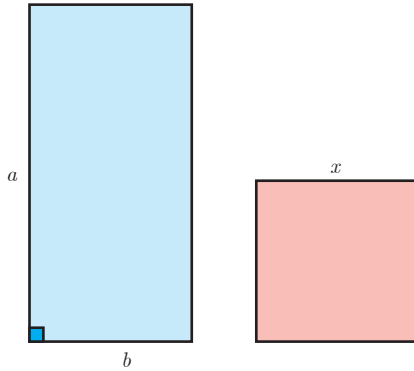
۶- سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که مبتلا به سرطان سینه است از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دغعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار در صدی از سلول‌های سرطانیاز بین می‌رود.

(الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی در ابتدا 10^{12} سلول داده باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانیچه تعداد سلول سرطانی در بدن فرد باقی می‌ماند؟

(ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی رشد توده سرطانی متوقف شده است برای آنکه این شخص به طور کامل درمان شود ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی به کمک شیمی درمانی کمتر از $10^6 \times 7$ سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی باقی مانده‌های سلول‌های سرطانی برداشته شود. برای این منظور مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

۷. میان دو عدد a و b و n عدد را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b تشکیل یک دنباله هندسی دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^n = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).

۱. مطابق آمار سالیانه ده هزار نفر در ایران به سرطان سینه مبتلا می‌شوند (مرکز تحقیقات سرطان دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی). در حال حاضر حدود ۲۵٪ مبتلایان به دلیل تشخیص دیر رس و تأخیر در شروع درمان فوت می‌کنند. جالب توجه است که تشخیص زودرس در سرطان سینه امکان پذیر است و با گنجاندن غربالگری سرطان سینه در سیستم بهداشتی می‌توان میزان مرگ و میر بیماری را به طور قابل توجهی کاهش داد.

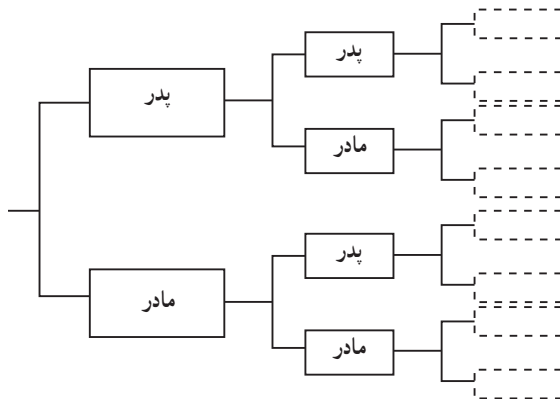


۸. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل زیر مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a

ب) b و x و a

ج) x و a و b



۹. هر شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ چهار پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده است؟ (نخستین نسل قبل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید)

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفر هستند.

۱۰. جمله سوم یک دنباله هندسی $\frac{63}{4}$ و جمله ششم همین دنباله $\frac{1701}{32}$ است. جمله پنجم این دنباله را به دست آورید.

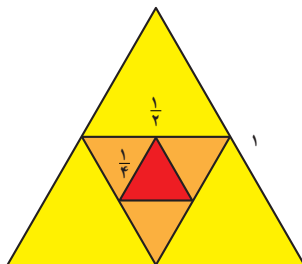
۱۱. مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

$$1) 1 + 4 + 16 + \dots + 4096$$

$$2) \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$$

$$3) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{1536}$$

۱۲. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.



۱۳. اگر مطابق شکل زیر در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ وسط‌های آنها را با یکدیگر وصل کنیم و همین روند را ادامه دهیم مجموع محیط‌های مثلث‌های به دست آمده پس از هشت مرحله چقدر است؟