

حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱ حدهای نامتناهی

۲ حد در بی نهایت



فصل





حدهای نامتناهی

فعالیت

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی با ضابطه

$$f(x) = \frac{255x}{100-x}$$

محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان

است مثلاً هزینه پاک‌سازی 20° درصد از آلودگی‌های این رودخانه $f(20) = 63/75$ است و این بدین معنی است که $63/75$ میلیون تومان برای این کار لازم است.

الف) جدول زیر را با توجه به تابع f ، کامل کنید. اعداد سطر دوم جدول چه چیزی را نشان می‌دهد؟

x	20°	40°	50°	80°	90°
$f(x)$	$63/75$				

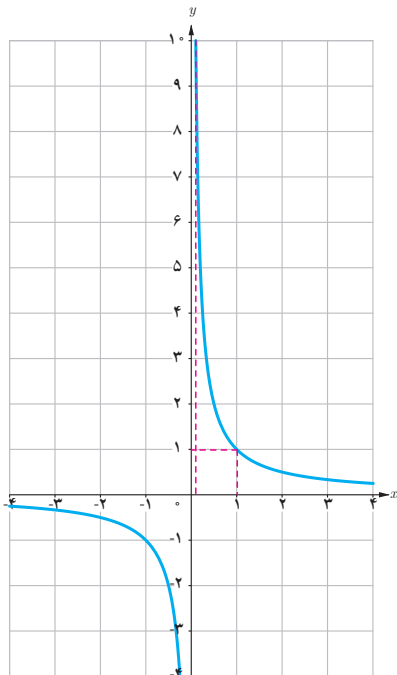
ب) اگر بخواهیم 95° درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی شود چقدر باید هزینه کنیم؟

پ) چرا هیچ‌گاه صددرصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

همان‌طور که ملاحظه شد با نزدیک شدن x به عدد 100 مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد و هرگاه x به قدر کافی به

عدد 100 نزدیک شود مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدید. می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی نقطه $x = 0$ بررسی کنیم.

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x)$	تعریف نشده	...	۱۰۰۰	...	۱۰	...

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک تر شود؟

۳ در حالی که $x \rightarrow 0^+$ آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود (از سمت راست)، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت مفروضی بزرگ تر کرد به شرطی که x را

به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کنیم در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

این نمادگذاری بدین معنی نیست که ∞ را عدد به حساب آورده‌ایم. همچنین بدین معنی نیست که حد مورد نظر وجود دارد.

کاردرکلاس

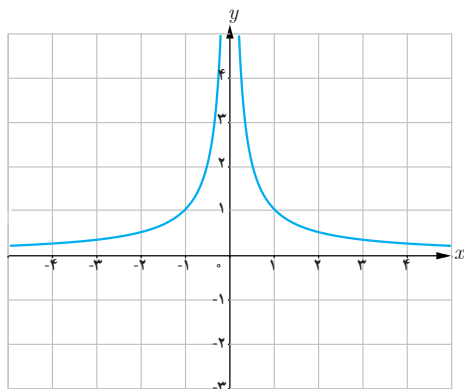
x	-۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	-۰/۱	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱
$f(x)$	-۱				-۱۰۰۰		

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول روبه‌رو را کامل کنید:

ب) اگر بخواهیم $f(x)$ از 10^6 کوچک تر شود مقدار x باید به چه عددی نزدیک شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟
ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟



♣ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع را در نقطه $x = 0$ بررسی کنیم به جدول زیر توجه کنید:

x	± 1	$\pm 0/5$	$\pm 0/1$	$\pm 0/0/1$	$\pm 0/00/1$	$\pm 0/000/1$
$f(x)$	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ به هیچ عددی

میل نمی‌کند و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ وجود ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در هر دو طرف a (به جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر بخواهیم) از هر عدد مثبت بزرگ کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

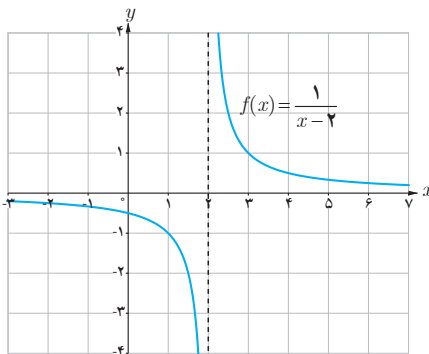
تعریف مشابهی از حد در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و خیلی کوچک منفی می‌شود در زیر وجود دارد.

تعریف :

فرض کنید تابع f در هر دو طرف به جز احتمالاً در خود a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

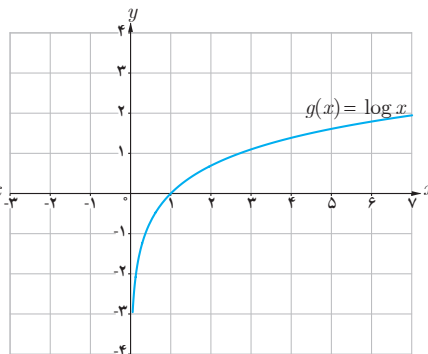
کاردرکلاس

با توجه به نمودار توابع زیر حدهای نامتناهی را مشخص کنید.

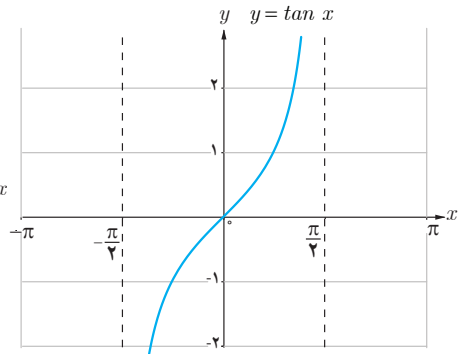


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} t(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} t(x) = \dots$$

قضایای حدهای بی نهایت

قضایای زیر در مورد حدهای بی نهایت برقرارند که در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.

❖ **قضیه ۱:** اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$$

❖ **مثال:** با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

❖ **قضیه ۲:** الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و بالعکس.

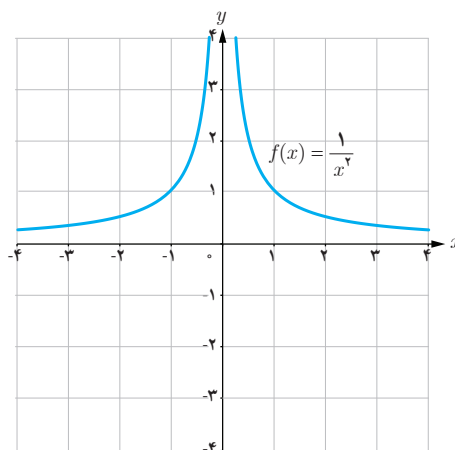
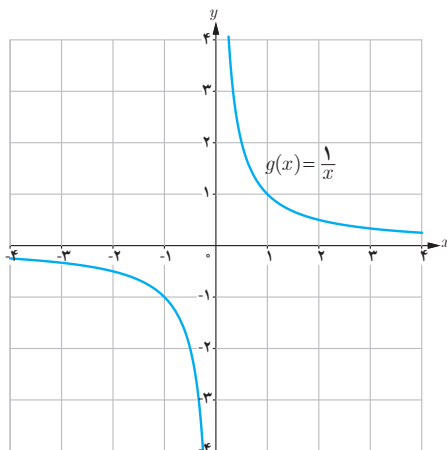
ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و بالعکس.

کاردر کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$



❖ **قضیه ۳:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه:

الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

❖ **تذکر:** قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را محاسبه کنید.

❖ **حل:** وقتی $x \rightarrow 2^-$ مخرج کسر یعنی $4-x^2$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند زیرا

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow 4 - x^2 > 0$$

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را محاسبه کنید.

❖ **حل:** وقتی $x \rightarrow 0^+$ حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که x در ربع اول دایره مثلثاتی

است مقدار $\sin x$ عددی مثبت است در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

کارد کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱ $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2}$

۲ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$

❖ **قضیه ۴:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

❖ **تذکر:** قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را محاسبه کنید.

روش اول: (استفاده از قضیه ۴) داریم $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = -\infty$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x+1 = \frac{\pi}{4}+1$ طبق قضیه

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \text{ فوق}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(x+1)\cos x}{\sin x} = \frac{(\frac{\pi}{4}+1) \times 0}{1} = 0$$

روش دوم:

اعمال روی حدود نامتناهی

فعالیت

۱) توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x+1$ را در نظر بگیرید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim_{x \rightarrow 0} ((f+g)(x))$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲) تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

❖ **قضیه ۵:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آنگاه؛

الف) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = +\infty$

اگر $L < 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = -\infty$

❖ **تذکر:** قضیه برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

۱

❖ قضیه ۵، در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به طریق مشابه برقرار است آن را بیان کنید.

❑ ۲ در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا از قضیه ۵ می توان برای محاسبه تابع های $f+g$ و یا $f \times g$ استفاده کرد. سپس حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) =$$

$$f(x) = \frac{-1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{(ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) =$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{(پ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) =$$

❖ **تذکر:** قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین $+\infty$ و $-\infty$ قرینه هم نیستند بنابراین در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به گونه ای می نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

❖ **مثال:** به حدود زیر توجه کنید.

$$\text{(الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{(پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

در محاسبه حدود هر سه قسمت به $-\infty - \infty$ می رسیم از آنجا که ∞ یک عدد نیست نمی توان گفت حاصل حدود مذکور برابر صفر است. برای محاسبه حدود فوق می توان نوشت:

$$\text{(الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{(پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3}{x + 4} \right)$ را محاسبه کنید.

❖ **حل:** اگرچه به صورت مستقیم عمل کنیم به حالت $-\infty + \infty$ می‌رسیم که نمی‌توان از قضایا استفاده نمود. اما اگر عبارت جلوی حد را ساده کنیم و به صورت یک کسر بنویسیم. سپس حدگیری را انجام دهیم داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2(x-1) - 3}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x - 5}{x^2 + 3x - 4} \quad (*)$$

حد صورت برابر -13 است با توجه به جدول تعیین علامت برای مخرج کسر داریم:

x	-4	1
$x^2 + 3x - 4$	+	-

وقتی $x \rightarrow -4^-$ حد مخرج کسر فوق با مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود و بنا به قضیه ۳ حد (*) برابر $-\infty$ خواهد بود.

کاردر کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

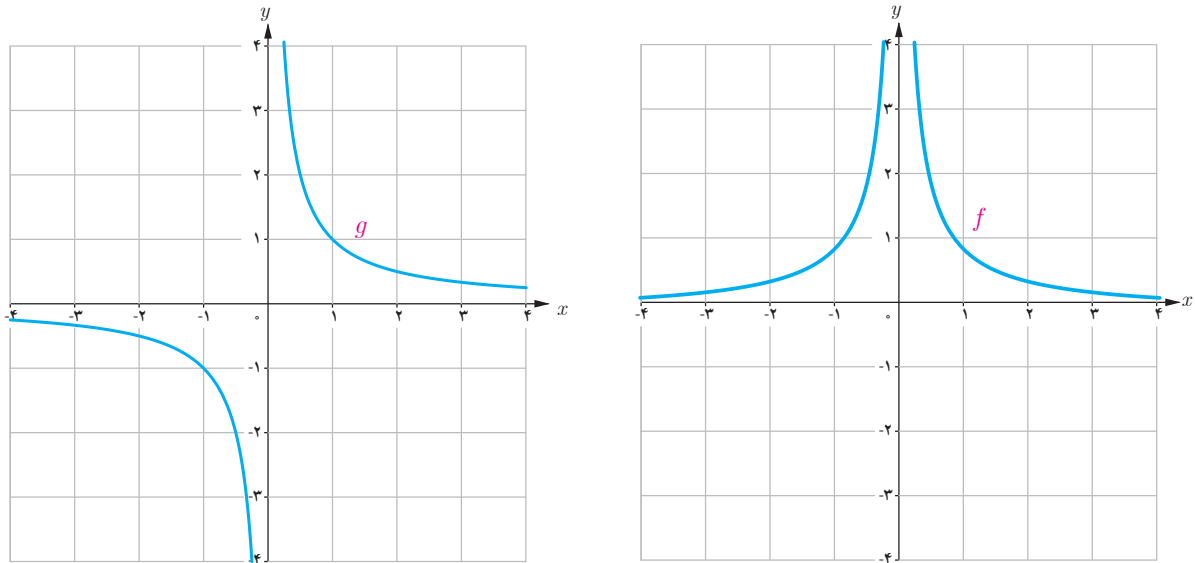
۱ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

۲ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

۳ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



این دو تابع در بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ پیوسته‌اند ولی در نقطه $x = 0$ تعریف نشده‌اند.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x = 0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف :

خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

❖ **مثال :** مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ را به دست آورید.

❖ **حل :** از $x^2 - 2x - 3 = 0$ نتیجه می‌شود $x = -1$ یا $x = 3$ شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

علاوه بر آن $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ در نتیجه خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است. از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

خط $x = 3$ شرایط لازم برای مجانب قائم را نداشت لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم $x = -1$ دارد.

کاردر کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدود نامتناهی ثابت کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{2+x} = +\infty$

۲ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x^2-9}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-9}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

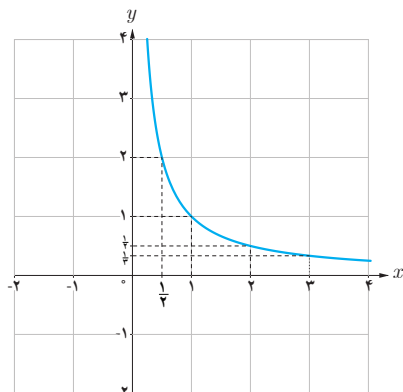
ب) $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا x را به سمت عددی میل می‌دادیم و نتیجه این می‌شد که مقدارهای y به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) می‌شدند. در این درس x را به دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) در نظر می‌گیریم و تغییرات y را بررسی می‌کنیم که در رسم نمودارها برای بررسی رفتار انتهایی نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰ ^۳	۱۰ ^۵	۱۰ ^۶
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ‌ها از $\frac{1}{3}$ کمتر شود x باید از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید از چه عددی بزرگ تر بگیریم؟

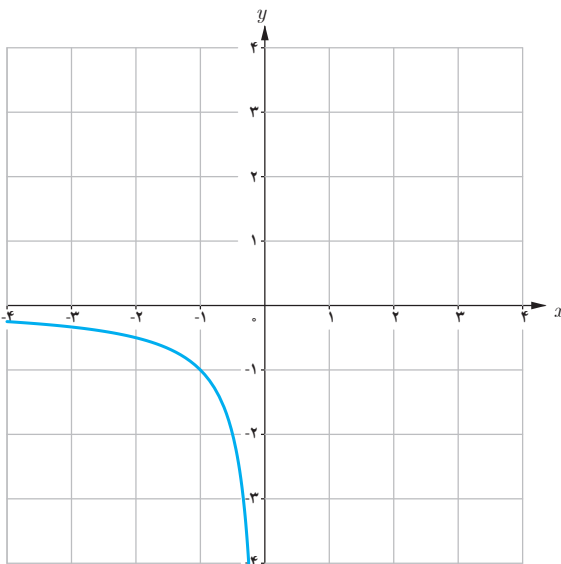
۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها از $\frac{1}{100}$ کوچک تر شود x را باید از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا به هر میزان دلخواه فاصله $f(x)$ از محور x ها را می توان کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد که مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه مناسب بزرگ انتخاب کنیم در این صورت می گوئیم حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ صفر است و می نویسیم.}$$

کاردر کلاس



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	-5	-2	-1
$f(x)$							

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها کمتر از $\frac{1}{5}$ شود، x از چه عددی کوچک تر در نظر گرفته شود؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها از $\frac{1}{\epsilon}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد اگر x از طریق اعداد منفی از هر عدد منفی کوچک تر شود می توان مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{در این صورت می نویسیم:}$$

❁ **تذکر:** منظور از $x \rightarrow \pm\infty$ آن است که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ لذا با توجه به فعالیت های بالا به طور خلاصه می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

به طور کلی می توان گفت:

برای هر تابع $f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به گونه ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آنکه x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده باشد در این حالت می گوییم با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می شود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{و می نویسیم:}$$

همچنین برای هر تابع $f(x)$ که در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند. به گونه ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرطی که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد. در این حالت می گوییم با رفتن x به سمت $-\infty$ ، $f(x)$ به

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{سمت L نزدیک می شود و می نویسیم:}$$

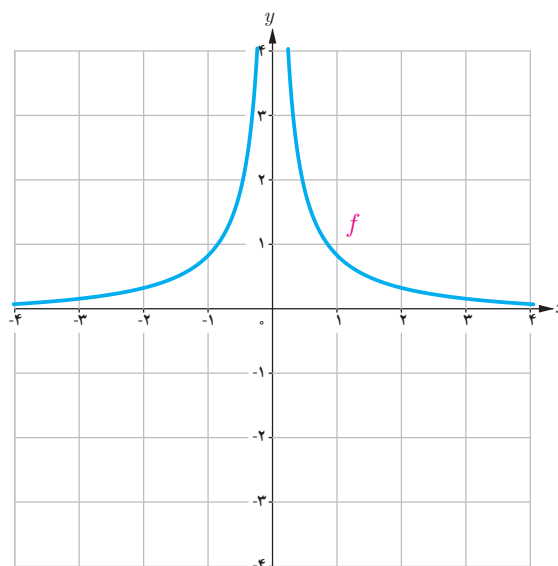
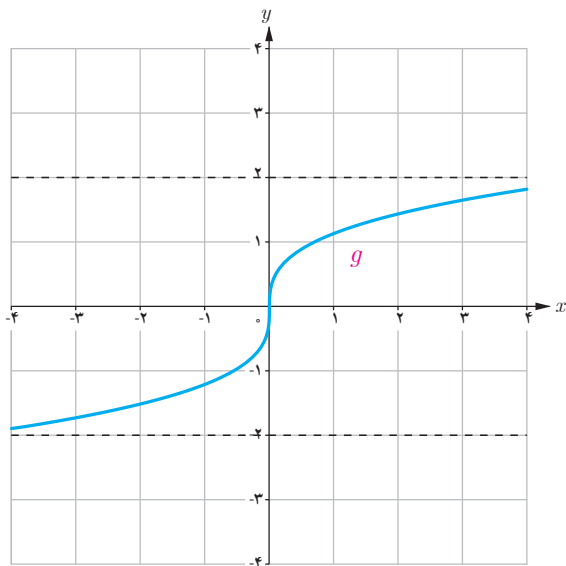
با استفاده از نمودارهای داده شده، حدود نامتناهی زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$



❖ **قضیه ۶:** اگر a عددی ثابت و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

❖ **قضیه ۷:** اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = L_1 L_2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0 \text{ و } g(x) \neq 0 \text{ با فرض})$$

❖ **تذکر:** قضیه فوق برای حالت $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

❁ مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$$

❁ حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

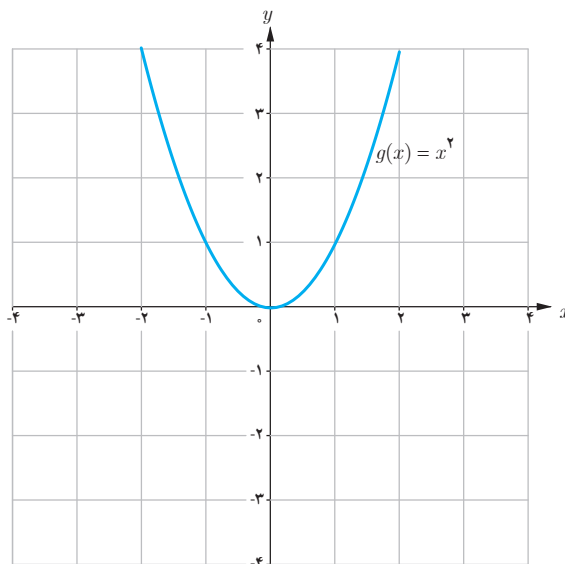
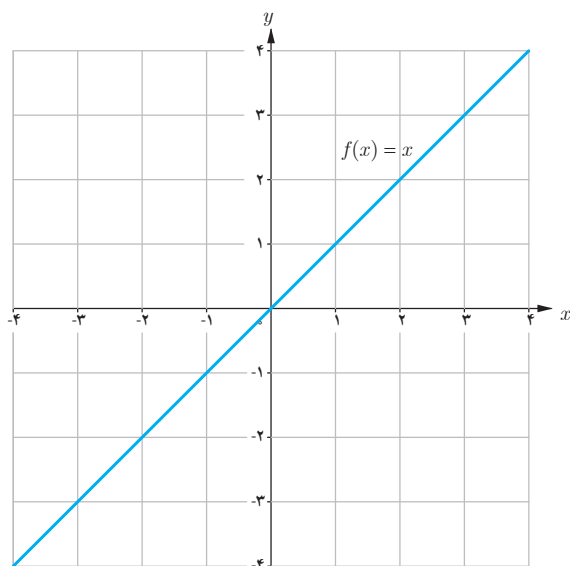
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

ب) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

حدود نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه حد توابع در $+\infty$ یا $-\infty$ ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ تر شوند و از هر عدد از پیش تعیین شده ای بزرگ تر شوند همان طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در



شکل زیر دیده می شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده ای بزرگ تر می شوند. همچنین ممکن است با کوچک شدن مقادیر x (منفی) مقدار $f(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده ای کوچک تر شود. در نمودارهای بالا می توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد تعیین شده ای کوچک تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد از پیش تعیین شده ای بزرگ تر می شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

همچنین اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ برود می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{به عنوان مثال}$$

کاردر کلاس

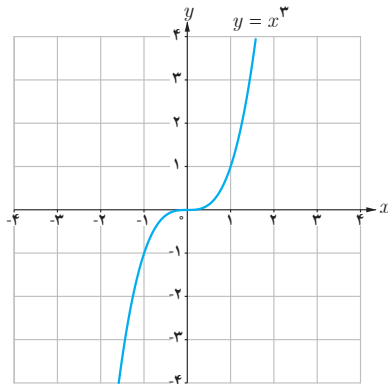
۱ به طریق مشابه مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$ حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$$

❁ **تذکر:** حدودی مانند $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ را حدود نامتناهی در بی نهایت می نامیم.



تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6
$f(x)$	-10^6	...	1	100

۲ با افزایش (کاهش) x ، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

❖ **قضیه ۸:** اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & : \text{زوج } n \\ -\infty & : \text{فرد } n \end{cases}$

❖ **مثال:** حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

❖ **حل:**

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ (در n عدد طبیعی) برابر حد جمله‌ای

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + \dots + l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

الف) اگر $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ و $g(x) = a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + l'$ دو چند جمله‌ای $(m, n \in \mathbb{N})$ باشند نشان

دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{a'} x^{n-m}$$

ب) در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟
پ) حدود زیر را محاسبه کنید.

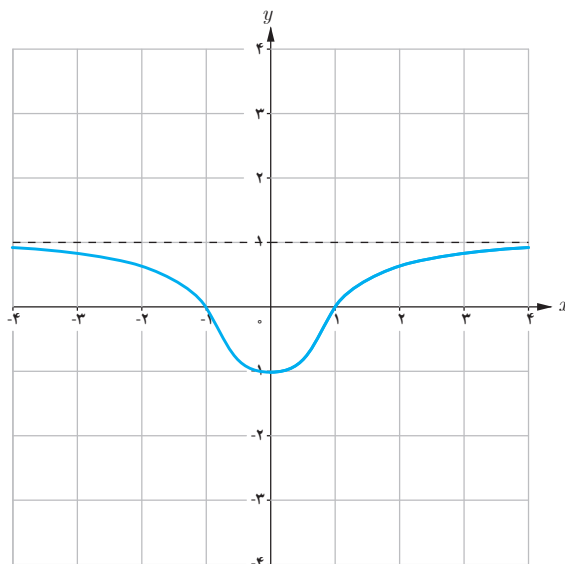
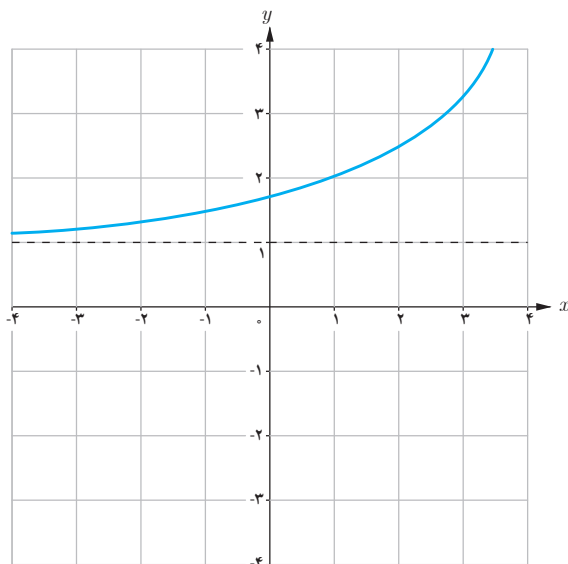
$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^5 - 7x + 1}{2x^5 - 8 + 3}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^5 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$$

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامند به شرطی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ یا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به عنوان مثال در هر یک از نمودارهای زیر خط $y = 1$ یک مجانب افقی تابع است. چرا؟



❁ مثال: مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

❁ حل: برای یافتن مجانب افقی تابع داریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$

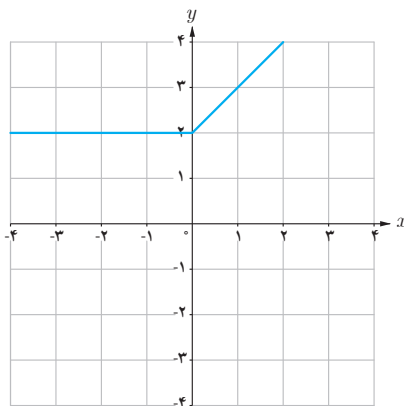
پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم است زیرا:

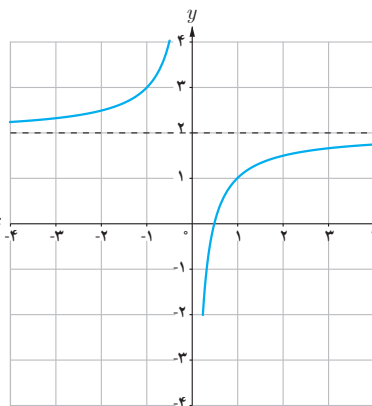
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

کارد کلاس

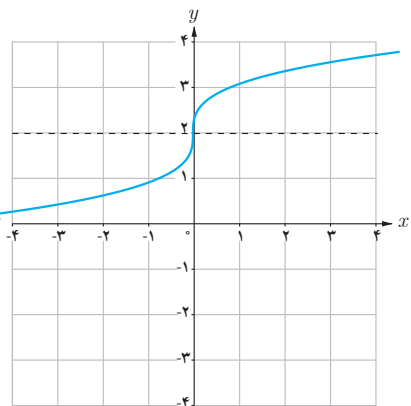
۱ خط $y = 2$ مجانب کدام یک از منحنی‌های زیر است؟



(ب)



(ب)



(الف)

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

ب) $g(x) = x^x$

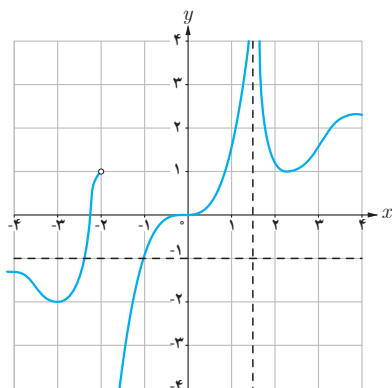
پ) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$

ج) همه مجانب‌ها

۳ حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x-2}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را به دست آورید:

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

ت) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

۶ آیا ممکن است نمودار $y = f(x)$ یکی از مجانب‌های قائم را قطع کند؟

آیا ممکن است یکی از مجانب‌های افقی اش را قطع کند. جواب‌هایتان را با رسم نمودار توضیح دهید.