۲ بخش‌پذیری و هم‌نهشتی

درس ۱ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء، بدون آنکه باقیمانده‌ای داشته باشیم، یعنی شمارش آن اشیا توسط شمارنده‌ها، مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ شمارش کرد.

به عبارت دیگر شمارنده‌های هر عدد مانند ۱۲ می‌توانند آن عدد را بشمارند. در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده می‌نویسیم ۲|۱۲ و می‌خوانیم ۲ می‌شمارد ۱۲ را یا ۲ عاد می‌کند عدد ۱۲ را(عاد کردن یعنی همان شمردن) و یا عدد ۱۲ بر ۲ بخش‌پذیر است (باقیماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر کار بیهوده‌ای است و لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد یا هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد و نیز توجه دارید که هر عدد بر خودش و ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱، هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری a بر b معادل است با اینکه بنویسیم $b|a$ (b، a را می‌شمارد یا b، a را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸− بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $-28=4\times(-7)$ یا باقیمانده تقسیم ۲۸− بر عدد ۴، صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح مفهوم عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a که مخالف صفر است[2] شمارندهٔ عدد b است یا a، b را می‌شمارد یا b بر a بخش‌پذیر است یا $a|b$ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=\cdots\times\cdots$

ب) $۹۱=۷\times\cdots \Leftrightarrow \cdots|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow \cdots=\cdots\times(-۶)$

ت) $۵|-۳۵= \Leftrightarrow \cdots=۵\times\cdots$

ث) $۰=۱۸\times\cdots \Leftrightarrow ۱۸|\cdots$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=\cdots$ یا $a=\cdots$

چ) $۲۶=۲\times۱۳ \Rightarrow ۲|\cdots$ و $\cdots|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر ابتدا نشان دهید $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید :

$$\forall m,n\in\mathbb{N}, m\le n \Rightarrow a^m\,|\,a^n$$

$$(۳^۹=۳^۵\times۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵|\cdots)$$

خواص رابطهٔ عاد کردن

۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد یعنی،

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times۵\ ,\ ۳|۶\times۴\ ,\ ۳|۶\times(-۷)\ ,\ \cdots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n\in\mathbb{N}$ است. یعنی :

$$\begin{cases} \text{الف)}\ a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,b^۲ \\ \text{ب)}\ a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از خاصیت ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم و برای اثبات (ب) کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ سؤال را بیان کنید.

الف) $۳|۶\times۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid۵$

ج) $۶|۳\times۴$ و $۶\nmid۳$ و $۶\nmid۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟

$$a|b \Rightarrow b=\cdots \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb=\cdots \Rightarrow \cdots$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=\cdots \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b=\cdots \Rightarrow \cdots$$

۲ اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد آنگاه a، عدد c را می‌شمارد.

$$\boldsymbol{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات: $\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱\ (۱) \\ b\,|\,c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = \cdots q_۲ \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = a\cdots \Rightarrow a\,|\,c$$

این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن، می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن و کار در کلاس قبل (شماره ۳) نشان دهید :

$a|b \Rightarrow a|b^n$

طبق فرض: $a\,|\,b$ تعدی

و می‌دانیم: $b\,|\,b^n$ $\Rightarrow \cdots|\cdots$

۳ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boldsymbol{a|b\ ،\ a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a\,|\,b \Rightarrow b = \cdots \times q_۱ \\ a\,|\,c \Rightarrow \cdots = aq_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \pm c = \cdots\underbrace{(q_۱ \pm q_۲)}_{q} \Rightarrow a\,|\cdots$

سؤال : آیا از اینکه $a|b \pm c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟

۴ اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a|\,|q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq \cdots$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات: $\left.\begin{matrix} a\,|\,b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |\,a\,| \leq \cdots \\ b\,|\,a \overset{(۴)}{\Rightarrow} \cdots \leq |\,a\,| \end{matrix}\right\} |\,a\,| = |\,b\,| \Rightarrow a = \pm b$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{matrix} a\,|\,۷m+۶ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+\cdots \\ a\,|\,۶m+۵ \Rightarrow \cdots|\,۴۲m+\cdots \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\,|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$ (چرا؟)

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = \cdots \overset{q^n=q'}{\Rightarrow} b^n = \cdots q' \Rightarrow a^n\,|\,b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c\,|\,d \Rightarrow \cdots = \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow b\times d = (a\times c)\underbrace{(q_۱\, q_۲)}_{q}$$

$$\Rightarrow \cdots = a\times c\times q \Rightarrow \cdots\,|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

(از خاصیت ۱ و خاصیت ۳ استفاده کنید).

در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید (هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود) این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است به‌صورت $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\ldots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$.

مثال : اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$$a\,|۹k+۷ \Rightarrow a\,|۷\times(۹k+۷) \Rightarrow a|۶۳k+\cdots$$

$$a\,|۷k+۶ \Rightarrow a\,|۹\times(۷k+۶) \Rightarrow a|\cdots+۵۴$$

$$\Rightarrow a\,|\,(\cdots+۵۴)-(۶۳k+\cdots) \Rightarrow a|۵ \Rightarrow a=\cdots \text{ یا } a=\cdots$$

خواندنی

می دانیم هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت : $\forall k \le n$ ،$k|n!$ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ عددی اول/ غیر اول است و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ عددی اول/ غیر اول است و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ نیز عددی ... است. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام ... نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟

(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از یک ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم ۷+!۱۰۰|۷ ⇐ ۷|۷ و !۱۰۰|۷)

حال می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است اگر بنویسیم $a|b$ یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است و نیز توجه دارید که b مضرب a است یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط زیر برقرار باشند آنگاه $(a,b)=d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>۰ : m|a, m|b \Rightarrow m\leq d$

شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m، بزرگ‌تر است.

به خاطر دارید که اگر $(a,b)=۱$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اولند.

مثال : $(۳,۴)=۱ \quad , \quad (۴,۹)=۱ \quad , \quad (۷,۱۱)=۱ \quad , \quad (۱,۱۲)=۱$

$(۶,۹)=۳ \quad , \quad (۸,۱۶)=۸ \quad , \quad (۰,۶)=۶ \quad , \quad (۴,-۶)=۲$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند آنگاه $[a,b]=c$

الف) $a|c \ , \ b|c$

ب) $\forall m>۰ \ , \ a|m \ , b|m \Rightarrow c\leq m$

توضیح دهید که شرط‌های (الف) و (ب) هر یک چه ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال : $[۳,۴]=۱۲ \quad , \quad [۶,۴]=۱۲ \quad , \quad [۱,۸]=۸ \quad , \quad (-۴,۱۶)=۱۶$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم یعنی نشان دهیم $|a|\,|a$ و ... و نیز برای هر $m>۰$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم ... $d\leq$ و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

۲ اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$، ثابت کنید، $(p,a)=۱$

فرض کنیم $(p,a)=d$

$d|p \overset{p \text{ اول}}{\Longrightarrow} d=۱$ یا ...

$d|a$ ①

اگر $d=p \overset{①}{\Longrightarrow} p|\cdots$ (و این با فرض $p\nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d=\cdots$ یا $(p,a)=\cdots$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

$۴\nmid ۶$ ولی $(۴,۶)=۲\neq۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقیمانده صفر نباشد یا به بیان دیگر a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$ در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

تذکر : همان‌طور که از مقطع ابتدایی به‌خاطر دارید در یک تقسیم وقتی a را بر b تقسیم می‌کنیم، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقیمانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{matrix} \text{طبق فرض}: m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ \text{طبق فرض}: n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۲ \times ۱۷q_۱ + ۱۰ \\ -۵n = (-۵) \times ۱۷q_۲ - ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵ = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲ + ۱ - ۱) - ۵ = ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲ = ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow \text{باقیمانده} = r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقیمانده تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است یعنی $r = ۰$ یا باقیمانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقیمانده تقسیم ۴ است به عبارت دیگر، $a = ۵k$ یا $a = ۵k + ۱$ یا $a = \cdots$ یا $a = ۵k + ۳$ یا $a = \cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k + ۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم که در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m = ۲k + r \ , \ ۰ \le r \le ۱ \Rightarrow m = \cdots \text{ یا } m = \cdots$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $P > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $P = ۶k + ۱$ یا $P = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است P را بر ۶ تقسیم کنیم در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$P = ۶k$ (۱)

$P = ۶k + ۱$ (۲)

$P=6k+2$ (۳)

$P=6k+3$ (۴)

$P=6k+4$ (۵)

$P=6k+5$ (۶)

P در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم : $P=3(k+1)$ یا $P=3k$ یا $3|P$ که با اول بودن P در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست مثلاً $(25=6\times4+1)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود و سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t+1)$ نوشته می‌شود (باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=4k$ (۱)

$a=4k+1$ (۲)

$a=4k+2$ (۳)

$a=4k+3$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_1=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k\}$ و $A_2=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+1\}$ و $A_3=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+2\}$ و $A_4=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+3\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های ... و ... زوج بوده و لذا $a=4k+1$ یا $a=4k+3$

اگر $a=4k+1 \Rightarrow a^2=16k^2+8k+1=8\,(\underbrace{2k^2+k}_{k'})+1=8k'+1$

اگر $a=4k+3 \Rightarrow a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$

$\Rightarrow a^2=8(\underbrace{2k^2+3k+1}_{t})+1=8t+1$

تمرین

۱ اگر فرض کنیم $ab=cd$ (a , b , c , d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ اگر $a|b$ ثابت کنید $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر kای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم، $5|4k+1$ ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.
(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m, m+۱)$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۷ اگر $P\neq q$ و P و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(P, q)=۱$.

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ در این صورت ثابت کنید :

$$m\leq n\ ,\ a|b\Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ را بر ۸ بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$
(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

درس ۲ رابطهٔ هم‌نهشتی روی $\mathbb{Z}$ و کاربردهای آن

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقیمانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقیمانده‌ها را نمایندهٔ مجموعه‌ای درنظر بگیریم که باقیماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب صفر، ۱، ۲ و ۳ باشد داریم :

$$A_۰=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k\}=\{\cdots ,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots ,۱۶,\cdots\}=[۰]_۴$$

$$A_۱=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۱\}=\{\cdots ,-۷,-۳,۱,۵,\cdots ,۱۳,\cdots ,۲۱,\cdots\}=[۱]_۴$$

$$A_۲=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۲\}=\{\cdots ,-۶,\cdots ,۲,۶,۱۰,\cdots\}=[۲]_۴$$

$$A_۳=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۳\}=\{\cdots ,-۱۳,\cdots ,-۵ ,-۱,۳,۷,۱۱,\cdots\}=[۳]_۴$$

۱ دو عضو (به‌صورت دلخواه) از مجموعهٔ $A_۰$ درنظر بگیرید، آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲ از مجموعهٔ $A_۴$ دو عضو دلخواه درنظر گرفته و تفاضل آنها را حساب کنید، آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳ نتیجه‌ای که از ۱ و ۲ گرفتید را در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از $A_۱$، اثبات کنید :

فرض کنید $a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=\cdots \end{cases} \Rightarrow a-b=(\cdots\cdots\cdots)-(۴k_۲+۱)$

$$\Rightarrow a-b=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳}\Rightarrow ۴|\cdots-\cdots$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_۳$ همگی بر عدد ۴، باقیمانده یکسان دارند؟ در مورد مجموعهٔ $A_۲$ چه می‌توان گفت؟

می‌دانیم مجموعه‌های $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ بوده و بنابراین هر دو عدد صحیح مانند a و b یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند یا هر کدام در یک مجموعه واقع هستند ($A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از

این چهار مجموعه باشند (باقیمانده تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقیمانده باشند) همواره $4 \mid a-b$ و اگر این‌طور نباشد $4 \nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b اگر $m \mid a-b$ (a و b بر m هم باقیمانده باشند) می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \,,\, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \; (m \in \mathbb{N})$$

قرارداد : مجموعهٔ همه اعداد صحیح که با باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد یعنی، $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم.

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

ویژگی ۱ : $\boldsymbol{a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c}$

(به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا کم کرد.)

اثبات :

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m \mid (a+c)-(\cdots+\cdots) \Rightarrow (\cdots+\cdots) \overset{m}{\equiv} (b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم $-1 \overset{4}{\equiv} 7$ یا $A_3 \ni (-1)$ و ۷ یا $4 \mid 7-(-1)$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند به عبارت دیگر اعدادحاصل یعنی $12 = 5 + 7$ و $4 = 5 + (-1)$ نیز در A_3 قرار خواهند گرفت.

ویژگی ۲ : $\boldsymbol{a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc}$

(دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.)

اثبات :

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid \cdots - \cdots \Rightarrow m \mid \cdots \times (a-b) \Rightarrow m \mid ac - \cdots$$
$$\Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} bc$$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

ویژگی ۳ : $\boldsymbol{a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n}$

(دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان n برسانیم.) $(n \in \mathbb{N})$

$$(5 \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow 5^3 \overset{3}{\equiv} 2^3)$$

اثبات : (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\text{ویژگی ۲}}{\Rightarrow} m \mid (a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}_{c}(\ \equiv\ \Rightarrow\ \ \equiv\ )$$

$$\Rightarrow m \mid a^n-b^n \Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} \cdots$$

تذکر : می‌دانیم $۳^۲ \overset{۴}{\equiv} ۵^۲$ ولی $۳ \overset{۴}{\not\equiv} ۵$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که . . .

ویژگی ۴ : $\boldsymbol{a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd}$ ① $\boldsymbol{a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d}$ ②

(دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا منها کرده یا در هم ضرب کرد.)

$$(۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\ ,\ ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۵ \times ۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰ \times ۲\ ,\ ۱۵ \times ۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۰ \times ۷)$$

$$\Rightarrow ۱۵+۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰+۲ \Rightarrow ۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid \cdots - \cdots \overset{\times c}{\Rightarrow} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid \cdots - \cdots \overset{\times b}{\Rightarrow} m \mid bc-\cdots \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid (ac-bc)+(\cdots - bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac-\cdots \Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات ② به عهدهٔ شما

تذکر مهم : (اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$)

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

$$(۲۷۹ = ۱۱ \times ۱۶ + ۳ \Rightarrow ۲۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۳)$$

اثبات :

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} \cdots$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم هم‌نهشت عدد a را به پیمانهٔ m، مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را به‌دست آوریم.

نتیجه ۲ : اگر a و b بر عدد طبیعی m، هم باقیمانده باشند (باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m، برابر باشد) در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال : باقیمانده تقسیم عدد $A=(۲۷)^۷+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ = ۱}_{①}\ ,\ ۱۹ = ۱۳ \times ۱ + ۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶}_{②} \overset{①,②}{\Rightarrow} (۲۷)^۷ + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۶ \overset{①}{\Rightarrow} A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r = ۷$$

پس باقیمانده A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقیمانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰ = ۷ \times ۱۴۲ + ۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶,\ ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳} = -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ \overset{۷}{\equiv} (-۱) \times ۱۲ = -۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} (-۱۲) + ۱۰ = -۲ \,,\, -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

ویژگی ۶ : $$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

(می‌توان به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.)

طبق فرض: $a \overset{m}{\equiv} b$

می‌دانیم: $mt \overset{m}{\equiv} mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲ \overset{۵}{\equiv} ۷$ اگر به سمت چپ رابطه ۱۵=۵×۳ و به سمت راست آن ۲۵=۵×۵ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۷+۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۲+۲۵$ یا $۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۲۷$ که این رابطه برقرار است.

ویژگی ۷ : $$ac \overset{m}{\equiv} bc \,,\, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

(اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم می‌بایست پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.)

(این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m) = ۱$ در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد برقرار است.

مثال : واضح است که $۳ \times ۴ \overset{۳}{\equiv} ۶ \times ۴$ و چون $(۴,۳) = ۱$ پس $۳ \overset{۳}{\equiv} ۶$.

فعالیت

همان‌طور که در مقطع ابتدایی آموختید عددنویسی ما، در مبنای ۱۰ انجام می‌شود به عبارت دیگر ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم یک عدد را در مبنای ده ، بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$۱۳۹۷ = ۱ \times ۱۰۰۰ + ۳ \times ۱۰۰ + ۹ \times ۱۰ + ۷$$

$$\Rightarrow ۱۳۹۷ = ۱ \times ۱۰^{۳} + ۳ \times ۱۰^{۲} + ۹ \times ۱۰ + ۷$$

۱ شما هر یک از اعداد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$۱۳۸۸۱۰۹ = ۱ \times ۱۰^{۶} + \dots$$

$$۱۳۵۷۱۱۲۲ =$$

۲ باقیمانده تقسیم عدد A=۱۳۵۸۱۱۲ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $10 \overset{9}{\equiv} 1$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $10^n \overset{9}{\equiv} 1$ بنابراین :

$$A=1\times 10^6+3\times 10^5+\cdots+\cdots+\cdots+1\times 10+2$$

$$10^6 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 1}{\Rightarrow} 1\times 10^6 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$10^5 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3\times 10^5 \overset{9}{\equiv} 3$$

$$10^4 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times 5}{\Rightarrow} \cdots \overset{9}{\equiv} \cdots$$

$$10^3 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow \cdots\times 10^3 \overset{9}{\equiv} \cdots$$

$$10^2 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times 10^2 \overset{9}{\equiv} \cdots$$

$$10 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times 10 \overset{9}{\equiv} \cdots$$

$$2 \overset{9}{\equiv} 2$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم : $A \overset{9}{\equiv} 1+3+5+8+1+1+2$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر، مجموعِ ارقام A است بنابراین می‌توان گفت «باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیماندهٔ مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

شما عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_2a_1a_0}$ را بسط داده و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید و همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots+10^2a_2+10\,a_1+10^0a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} \cdots$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10 \overset{3}{\equiv} 1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k\in W\,,\,10^k \overset{3}{\equiv} 1$ بنابراین مشابه فعالیت قبل باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ واضح است که $10 \overset{11}{\equiv} -1$ بنابراین برای هر n زوج، $10^n \overset{11}{\equiv} 1$ و برای هر n فرد، $10^n \overset{11}{\equiv} -1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقیماندهٔ عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times 10^6+9\times 10^5+8\times 10^4+\cdots+2\times 10+7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 4\times\cdots+\cdots\times(-1)+\cdots\times 1+\cdots+2\times(-1)+7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 7-2+3-5+8-9+4=6 \Rightarrow r=\cdots$$

۳ می‌دانیم $10 \overset{2}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{10}{\equiv} \cdots$ در این‌صورت :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,;\, 10^k \overset{2}{\equiv} \cdots \text{ و } 10^k \overset{5}{\equiv} \cdots \text{ و } 10^k \overset{10}{\equiv} 0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+...+10^2a_2+10\ a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots\times a_2+\cdots+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{5}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{10}{\equiv}a_0$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده یا مشخص شده است. به‌عنوان مثال اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، در این‌صورت ۲۲ بهمن در همان سال چند شنبه است؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه سؤال بالا فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از هفته مانند شنبه پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود، به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۱۹=۱۲+۷ فروردین و ۲۶=۱۹+۷ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. حتماً در بحث تقویم و روزهای هفته دقت داریم که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند. البته هر چهار سال یک‌بار (سال کبیسه) اسفند نیز ۳۰ روزه است. حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $19\overset{7}{\equiv}5$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول زیر مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن یعنی $d=29+3\times30+12=131$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

از طرفی $\cdots \stackrel{۷}{\equiv}$ ۱۳۱ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته است؟ درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادلهٔ هم‌نهشتی

یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \stackrel{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل یک معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_\circ \in \mathbb{Z}$ است که در معادله فوق صدق کنند یعنی $ax_\circ \stackrel{m}{\equiv} b$. $(a,b \in \mathbb{Z})$

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x \stackrel{۳}{\equiv} ۲$ را درنظر بگیرید، x می‌تواند ۲ باشد و نیز می‌تواند ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم می‌توان تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x \stackrel{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳ \mid x-۲ \Rightarrow (x-۲)=۳k \Rightarrow x=۳k+۲$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_\circ=۲$ و $x_\circ=۵$ و $x_\circ=۸$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله، ضریب x را باید حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x \stackrel{۵}{\equiv} ۱۷$ را به‌دست آورید.

$$۴x \stackrel{۵}{\equiv} ۱۷ \,,\, ۱۷ \stackrel{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۴x \stackrel{۵}{\equiv} ۲ \stackrel{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow} ۴x \stackrel{۵}{\equiv} ۲+(۲\times ۵)$$

$$\Rightarrow ۴x \stackrel{۵}{\equiv} ۱۲ \stackrel{(۴,۵)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۴}x \stackrel{۵}{\equiv} \cancel{۴}\times ۳ \Rightarrow x \stackrel{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۵k+۳$$

$$(۵|x-۳ \Rightarrow x-۳=۵k \Rightarrow x=۵k+۳)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x \stackrel{۷}{\equiv} ۱۳$

$$۳x \stackrel{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \stackrel{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶ \stackrel{(۳,۷)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۳}x \stackrel{۷}{\equiv} \cancel{۳}\times ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \stackrel{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$ (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

نتیجه : اگر $(a,m)=۱$ چون برای هر b، همواره $۱|b$ پس معادلهٔ $ax \stackrel{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $۶x \stackrel{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا، $(۶,۹)=۳$ و $۳\nmid ۱۱$ و معادلهٔ $۴x \stackrel{۶}{\equiv} ۱۸$ دارای جواب است. چرا؟ این معادله را حل کنید :

$$۴x \stackrel{۶}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۲\times ۲x \stackrel{۶}{\equiv} ۲\times ۹ \,,\, (۲,۶)=۲ \stackrel{\text{ویژگی ۷}}{\Rightarrow} ۲x \stackrel{\frac{۶}{۲}}{\equiv} ۹$$

$$\Rightarrow ۲x \stackrel{۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۲x \stackrel{۳}{\equiv} ۹+۳=۱۲ \Rightarrow \cancel{۲}x \stackrel{۳}{\equiv} \cancel{۲}\times ۶ \Rightarrow x=۳k+۶$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

$$۴\times\cdots+۱\times۳=\cdots$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$۱\times\cdots+\cdots\times ۵=۱۹$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $۴\times x+۳\times y=۱۹$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $y\in W$ و x بیابیم که $\cdots\times x+\cdots\times y=\cdots$ چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و a و b و $c\in\mathbb{Z}$ در این صورت معادلهٔ مذکور $(ax+by=c)$ را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دوصورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b\,|\,ax-c \Rightarrow b\,|\,ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{b}{\equiv}c\ (b>۰) \quad \text{و} \quad ax\overset{-b}{\equiv}c\ (b<۰)$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت :

$$by\overset{-a}{\equiv}c \quad \text{و} \quad by\overset{a}{\equiv}c$$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x\overset{\cdots}{\equiv}\cdots \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۹-\cdots \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۴$$

$$\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}\cdots \Rightarrow \boxed{x=۵k+\cdots}$$

$$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹ \Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹ \Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$$

$$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \boxed{y=\cdots k+۱}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد؟

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x+3y=19$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم :

$$4x+3y=19 \Rightarrow 4x \overset{\cdots}{\equiv} \cdots \Rightarrow 4x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 4x \overset{3}{\equiv} 1+\cdots$$

$$\Rightarrow \cancel{4}x \overset{3}{\equiv} \cancel{4}\times 1 \Rightarrow \underline{x=3k+1} \Rightarrow 4(3k+1)+3y=19$$

$$\Rightarrow 12k+4+3y=19 \Rightarrow 12k+3y=\cdots \Rightarrow \cdots + y=5$$

$$\Rightarrow \underline{y=-4k+5}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} ,\ k=\cdots \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

به‌ازای $k=2$ و بیشتر از آن $y<0$ و به‌ازای $k=-1$ و کمتر از آن $x<0$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال : به چند طریق می‌توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $2000x+5000y=17000$

$$2000x+5000y=17000 \Rightarrow 2x+5y=\cdots \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 17 , 17 \overset{5}{\equiv} \cdots$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \overset{5}{\equiv} \cancel{2}\times 1 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} \cdots \Rightarrow \underline{x=5k+1} \Rightarrow 2(5k+1)+5y=17$$

$$\Rightarrow 10k+2+5y=17 \Rightarrow 10k+5y=15 \Rightarrow \underline{y=-2k+3}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} ,\ k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

(فقط به‌ازای ۱ و $k=0$ برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان خُرد کردن ۱۷۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

مثال : در یک رستوران فقط دو نوع غذای قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد قورمه‌سبزی و قیمهٔ سفارش داده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=5 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 5 \Rightarrow \underline{x=k+\cdots}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{5}+y=\cancel{5} \Rightarrow \underline{y=\cdots}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.

مثال : تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم مرکز تیراندازی می‌کند، اگر به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همهٔ تیرها داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 + 3 \Rightarrow \cancel{5}x \overset{3}{\equiv} \cancel{5} \times 9$$

$$\Rightarrow \underline{x = 3k + 9}\ ,\ 5(3k + 9) + 3y = 42 \Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow \underline{y = -5k - 1}$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}$$

($x = 6$ و $y = 4$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایره کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \overset{3}{\equiv} 0 \text{ یا } k \overset{3}{\equiv} 1 \text{ یا } k \overset{3}{\equiv} 2$$

(به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n | m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1} b + \binom{n}{2} \times a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3} b^3 + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 33^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(5 - 3a)$ و $(7 - 4a)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(6 + 9a)$ را به‌دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \ldots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را به‌دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خُرد کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه گل به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده و به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده است و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت‌هایی می‌توانسته این امتیاز را به‌دست آورده باشد؟