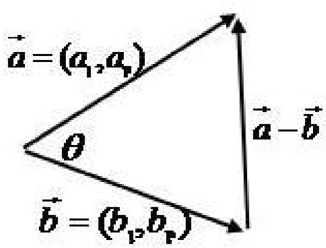
به نام خدا

هندسه ۳ – فصل بردارها – درس دوم – ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها




فرض کنید دوبردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ همانند شکل زیر داده شده اند.

زاویه $\theta$ بین این دو بردار را چگونه می توان یافت؟ برای این منظور بردار

تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ را نیز در شکل مقابل رسم کرده ایم تا مثلثی به طول اضلاع زیر بدست

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوسها که سال گذشته آموخته اید می توان نوشت.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$
$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (1)$$

از طرفی صورت کسر فوق را میتوان با توجه به اندازه های اضلاع مثلث که قبلا محاسبه شده اند بصورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2)$$
$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)=a_1b_1+a_2b_2$$

پس عبارت (۱) بصورت زیر بدست می آید.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است (چرا؟). با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $\pi \le \theta \le ۰$ بدست می آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست ظاهر شده است را معمولا با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می دهند و به آن حاصلضرب داخلی یا حاصلضرب نقطه ای دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می گویند. بنابراین می توان نوشت.

$$\cos\theta = \frac{a_۱b_۱ + a_۲b_۲}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a}.\vec{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

بطور مشابه حاصلضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشند؛ در اینصورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می دهیم بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\vec{a}.\vec{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر $\pi \le \theta \le ۰$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a},\vec{b}$ در $\mathbb{R}^۳$ باشند آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دوبردار $\vec{a},\vec{b}$ صفر باشند آنگاه $\vec{a}.\vec{b} = ۰$ هر چند که در این حالت زاویه $\theta$ بین دو بردار تعریف نمی شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b} = (۲ \times ۱) + (-۱ \times -۱) + (۲ \times ۰) = ۳$$

از طرفی اگر $\pi \le \theta \le ۰$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۳ = \sqrt{۲^۲+(-۱)^۲+۲^۲}\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۰^۲}\cos\theta \Rightarrow$$
$$\cos\theta = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

خواص ضرب داخلی

۱. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابجایی

$$\vec{a}.\vec{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ = b_۱a_۱ + b_۲a_۲ + b_۳a_۳ = \vec{b}.\vec{a}$$

۲. $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^۲$

$$\vec{a}.\vec{a} = a_۱a_۱ + a_۲a_۲ + a_۳a_۳ = a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ = |a|^۲$$

۳. $a.(b+c) = a.b + a.c$ خاصیت شرکت‌پذیری

$$\begin{aligned} a.(b+c) &= a_۱.(b_۱+c_۱) + a_۲.(b_۲+c_۲) + a_۳.(b_۳+c_۳) \\ &= a_۱b_۱ + a_۱c_۱ + a_۲b_۲ + a_۲c_۲ + a_۳b_۳ + a_۳c_۳ \\ &= a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ + a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + a_۳c_۳ \\ &= \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} \end{aligned}$$

۴. $|\vec{a}.\vec{b}| \Leftrightarrow a \perp b$ ( $a \perp b$ یعنی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند) و بردارها نیز غیرصفر باشند.

$$a.b = ۰ \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta = ۰ \underset{|b|\neq ۰}{\overset{|a|\neq ۰}{\Leftrightarrow}} \cos\theta = ۰ \overset{۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۵. $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = \left|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right|\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right| \leq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos\theta| \leq ۱$ استفاده شده است.

دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ را که زاویه بین آنها $\theta$ است با فرض $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ در نظر می گیریم. می خواهیم تصویر قایم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a'}$ نمایش داده ایم بدست آوریم. از روی

شکل مشخص است که $\vec{a'} = r\vec{b}$ برای یک r حقیقی. با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a'}$ از $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a}-\vec{a'}).\vec{b} = ۰ \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b} = ۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} - r\vec{b}.\vec{b} = ۰ \Rightarrow r = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}$$

بنابراین بردار تصویر قایم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ بصورت زیر بدست می آید.

$$\vec{a'} = r\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

مثال: تصویر قایم بردار $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ بیابید.

$$\vec{a}.\vec{b} = ۲\times ۱ + (-۱)(-۱) + (۲)(۰) = ۳$$

$$|b| = \sqrt{(۱)^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۲}$$

$$a' = \frac{a.b}{|b|^۲}b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}b = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}(۱,-۱,۰) = (\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, ۰)$$

کار در کلاس

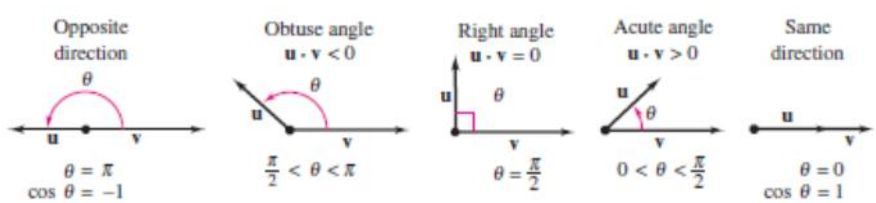
۱- تصویر بردار $i = (۱,۰,۰)$ بر امتداد بردار $j = (۰,۱,۰)$ را بیابید.

۲- نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

۳- نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

الف) $a.b > ۰$ ب) $a.b = ۰$ پ) $a.b < ۰$ ت) $a.b = |a||b|$ ج) $a.b = -|a||b|$



## ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصلضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف. فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} i+\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix} k$$
$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲, a_۱b_۳-a_۳b_۱, a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

مثال. بردارهای $i$و $j$ در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i}\times\vec{j}$ و $\vec{j}\times\vec{i}$ را به دست آورید.

$$i\times j=(۱,۰,۰,)\times(۰,۱,۰)=((۰)(۰)-(۰)(۱),(۰)(۰)-(۱)(۰),(۱)(۱)-(۰)(۰))=(۰,۰,۱)=\vec{k}$$
$$j\times i=(۰,۱,۰,)\times(۱,۰,۰)=((۱)(۰)-(۰)(۰),(۰)(۰)-(۰)(۱),(۰)(۰)-(۱)(۱))=(۰,۰,-۱)=-\vec{k}$$

همانطور که مشاهده شد حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{i}$و $\vec{j}$ برابر با بردار برابر با بردار $\vec{k}$ شد که بر هر دوی $\vec{i}$و $\vec{j}$ می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

خاصیت ۱: فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$a.(a\times b)=۰, \quad b.(a\times b)=۰$$

این خاصیت گویای این مطلب است که حاصلضرب خارجی دو بردار برابر بردار عمود بر آنهاست برقرار است.

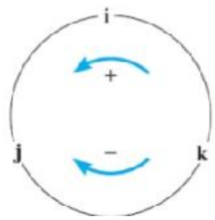
اثبات.

$$a.(a\times b)=a_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+a_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+a_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=۰$$
$$b.(a\times b)=b_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+b_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+b_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)=۰$$

می توان نشان داد که برای سه بردار یکه $i$و $j$ و $k$ روابط زیر برقرار است

$$i \times j = k\,,\;\; j \times k = i\,,\;\; k \times i = j$$
$$j \times i = -k\,,\; k \times j = -i\,,\; i \times k = -j$$

معمولاً این روابط را بصورت نمودار چرخشی زیر نمایش نیز می دهند.




اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار غیرصفر و $\theta$ زاویه بین آنها باشد اندازه بردار $a \times b$ می شود:

$$\begin{aligned}
|a \times b|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^1 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = |a|^2|b|^2 - (a.b)^2 \\
&= |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2\cos^2\theta = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta) = |a|^2|b|^2\sin^2\theta = (|a||b|\sin\theta)^2
\end{aligned}$$

بنابراین اندازه بردار $a \times b$ برابر است با

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta$$

با توجه به مطالب سال قبل سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اضلاع آن برابر $|a|\,,|b|$ است. بنابراین می توان گفت که ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع مذکور است.

ضرب خارجی دارای خواص متعددی است که در زیر برخی از آنها اشاره شده است. در زیر یکی از این خواص را اثبات می کنیم.

خاصیت ۲: $a \times b = -b \times a$.

خاصیت ۳: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

خاصیت ۴: اگر $r$ عددی حقیقی باشد آنگاه: $ra \times b = r(a \times b) = a \times rb$.

خاصیت ۵: برای سه بردار $a, b, c$ داریم:

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$
$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

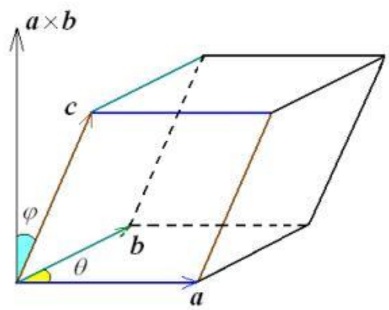
خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر $a,b$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

اثبات.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow|a\times b|=0\Leftrightarrow|a||b|\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin\theta=0\Leftrightarrow\theta=0 \quad \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

**حجم متوازی السطوح**

اگر aوbوc سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه متوازی السطوحی همانند شکل زیر می توان به کمک آنها تولید کرد.




همانطور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $b\times c$ یعنی

$$\text{ارتفاع}=\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^{2}}(b\times c)$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای b وc تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|b\times c|$.

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{مساحت قاعده}\times\text{اندازه ارتفاع}\quad |b\times c|\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^{2}}(b\times c)=|a.(b\times c)|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متواطی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با $|a.(b\times c)|$.

مثال. حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $a=(1,1,0),b=(0,1,1),c=(1,0,1)$ تولید میشود.

حل. با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به دست می آید.

$b \times c = (۱, ۱, -۱)$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید

$V \ :|a.(b \times c)| = |(۱,۱,۰).(۱,۱,-۱)| = |۱+۱+۰| = ۲$

پیش تر اشاره شد که اگر سه بردار a و b و c در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی السطوح و نیز $|a.(b \times c)|$ برابر صفر میشود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می شود.

مثال. آیا بردارهای $a = (۲,۳,-۱), b = (۱,-۱,۳), c = (۱,۹,-۱)$ در یک صفحه اند؟

حل. برای این منظور کافی است $a.(b \times c)$ را بدست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند

$b \times c = (-۱۶,۱۴,۱۰) \Rightarrow a.(b \times c) = -۳۲+۴۲-۱۰ = ۰ \Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند

## تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است تصویر قائم a را بر امتداد b بدست آورید.

۲- فرض کنید a وb و c بردارهایی باشند به ترتیب به طولهای ۱و ۲ و ۳ با این خاصیت که $a+b+c = ۰$. مقدار $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = ۰$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار a وb و c مثال بزنید که برای آنها $a \cdot b = a \cdot c$ ولی $b \neq c$.

۴- اگر $a = (۱,-۳,۴), b = (۳,-۴,۲), c = (-۱,۱,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد b+c را بدست آورید.

۵- برداری عمود بر دو بردار $a = (۱,-۳,۲), b = (-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۶- سه بردار a وb و c مثال بزنید که برای آنها $a \times b = a \times c$ ولی $b \neq c$.

۷- بردارهای a وb مفروضند بطوریکه $|a| = ۳$ ، $|b| = ۲۶$ و $|a \times b| = ۷۲$ . مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (-۴,۰,۴), b = (۵,۵,۰), A = (۳,۵,۷)$ داده شده است را بیابید.