

به نام خدا

هندسه ۳ - فصل بردارها - درس اول - معرفی فضای  $\mathbb{R}^2$

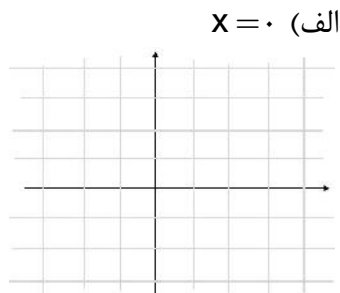
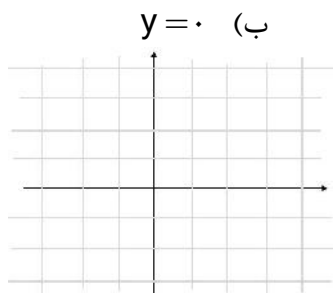
با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(a,b)$  که  $a,b \in \mathbb{R}$  مشخص می شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می کند. همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می دانید که حالت کلی آن به صورت  $ax + by = c$  است که در آن  $a,b,c \in \mathbb{R}$ .

به طور کلی هر وقت گفته می شود رابطه یا معادله ای نمودار  $G$  را مشخص می کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار  $G$  در آن رابطه یا معادله صدق می کند و برعکس هر نقطه که مختصات هر نقطه آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار  $G$  قرار دارد.

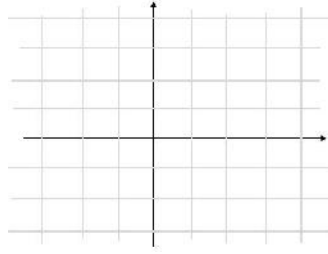
با توجه به آنچه گفته شد می خواهیم در فضای  $\mathbb{R}^2$  یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل ها، روابط مرتبط به آنها را مشخص نماییم.

### کار در کلاس

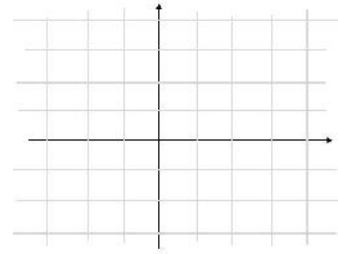
(۱) برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.



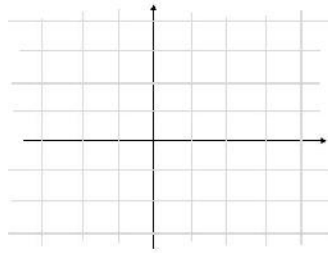
$x=1$  ,  $-1 \leq y \leq 3$  (ت)



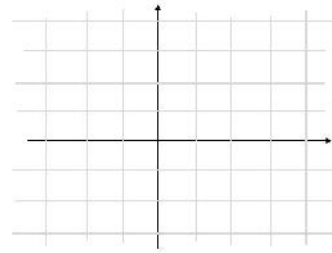
$x=1$  (پ)



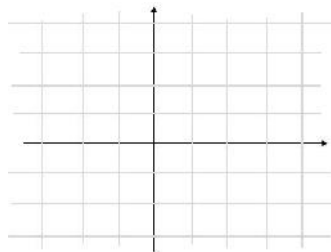
$y=x^r$  ,  $1 \leq x \leq 2$  (ج)



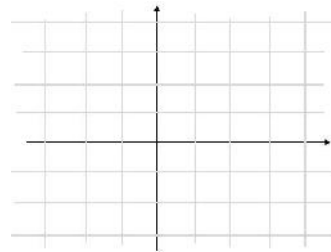
$y=x^r$  ,  $0 \leq x \leq 2$  (ث)



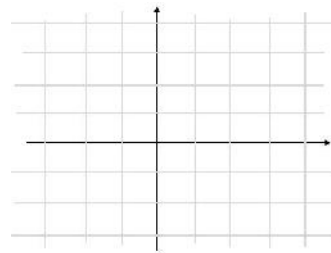
$x^r < y \leq 2$  (ح)



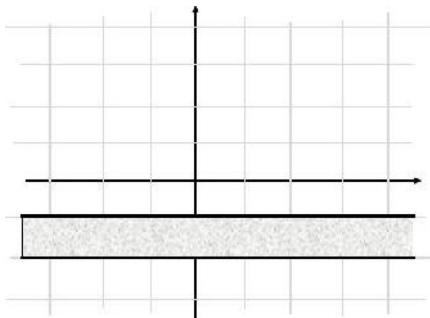
$y \geq x^r$  (چ)



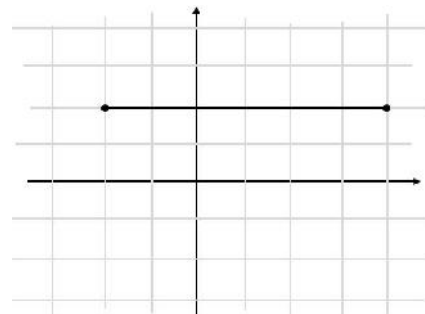
$-1 \leq x \leq 1$  ,  $1 \leq y \leq 2$  (خ)



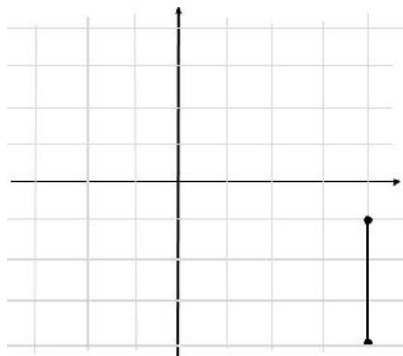
۲) در هر یک از شکل‌های زیر ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.<sup>۱</sup>



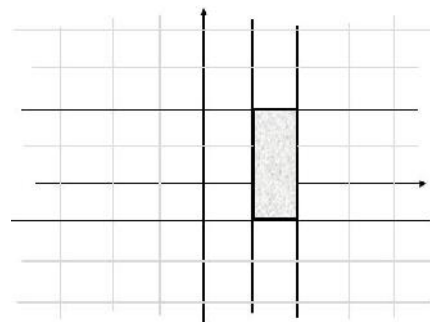
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

حال به سراغ فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای  $\mathbb{R}^2$  و مجموعه تمام سه‌تایی‌های  $(a,b,c)$  که در آن  $a,b,c \in \mathbb{R}$  برقرار می‌نماییم و سپس ارتباطین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باسد از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

معرفی فضای  $\mathbb{R}^3$

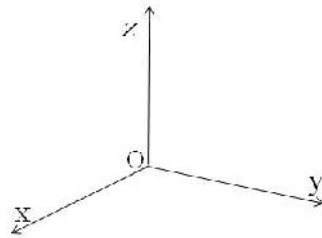
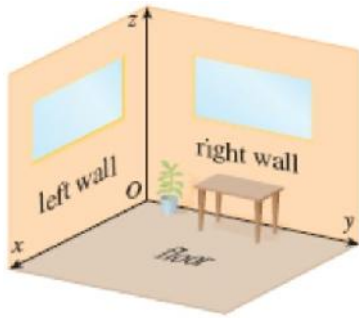
---

صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

مشابه  $\mathbb{R}^3$  می توان مجموعه تمام سه تایی های مرتب  $(x, y, z)$  که در آنها  $x, y, z$  اعداد حقیقی اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای  $\mathbb{R}^3$  می گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

به یاد می آوریم که برای نمایش نقاط  $\mathbb{R}^3$  از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم  $X$  ها و  $Y$  ها استفاده شد. بطور مشابه می توان فضای  $\mathbb{R}^3$  را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه ای مانند  $O$  متقاطع اند نمایش داد. این محل تقاطع مبدا مختصات دستگاه می باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می باشد که در شکل مقابل دیده می شود. این سه محور در واقع تشکیل یک کنج می دهند.

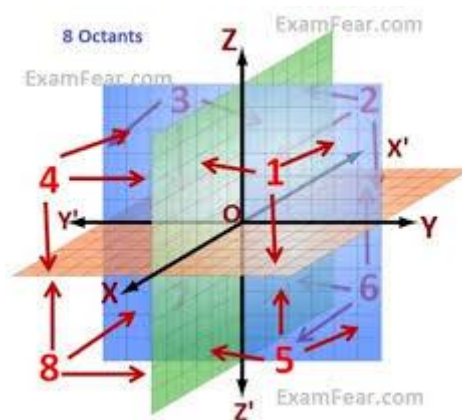
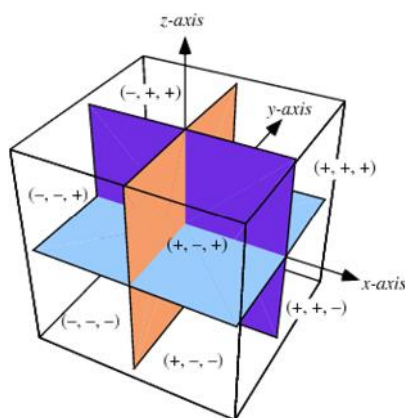


محورهای  $Ox, Oy, Oz$  به ترتیب محور  $X$ ها، محور  $Y$ ها و محور  $Z$ ها نامیده می شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می باشند. صفحات مختصات عبارتند از صفحه  $XY$  (کف اتاق) شامل محور  $X$ ها،  $Y$ ها، صفحه  $YZ$  (دیوار سمت راست) شامل محور  $Y$ ها و  $Z$ ها، صفحه  $XZ$  (دیوار سمت چپ) شامل محور  $X$ ها و  $Z$ ها هستند. جهت مثبت هر یک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدا مختصات (نقطه  $O$ ) در خلاف جهت

ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه  $\mathbb{R}^3$  به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه  $XY$  و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه  $XY$  هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه  $XY$  مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  شماره گذاری می‌شوند.

مثلا ناحیه ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه  $XY$  از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل ها و جدول زیر مشخص شده اند.

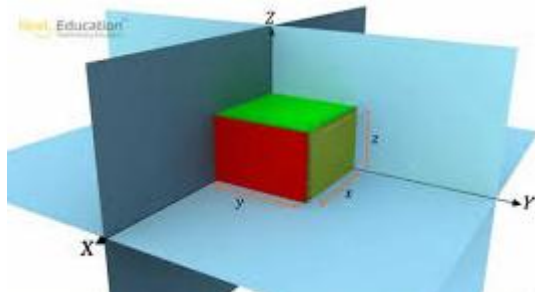
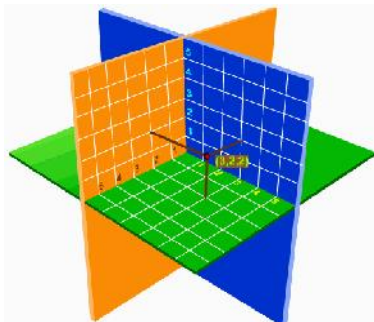
شماره ناحیه	$x$	$y$	$z$
<i>I</i>	+	+	+
<i>II</i>	-	+	+
<i>III</i>	-	-	+
<i>IV</i>	+	-	+
<i>V</i>	+	+	-
<i>VI</i>	-	+	-
<i>VII</i>	-	-	-
<i>VIII</i>	+	-	-



برای نمایش سه تایی مرتب  $(x, y, z)$  در دستگاه مختصات  $\mathbb{R}^3$  کافی است سه نقطه به طول های  $x, y, z$  به ترتیب بر روی محورهای  $x, y, z$  در نظر گرفته و سپس صفحه گذرنده از  $x$  و موازی با صفحه  $YZ$ ، صفحه گذرنده از  $y$  و موازی با صفحه  $XZ$  و صفحه گذرنده از  $z$  و موازی با صفحه  $XY$  را در نظر بگیریم.

محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول  $x$ ، عرض  $y$  و ارتفاع  $z$  است که نمایش دهنده سه تایی

مرتبه  $(x, y, z)$  می باشد. مثلا نقطه  $P$  در شکل زیر متناظر با سه تایی مرتبه  $(2, 4, 1)$  است.



همچنین نقطه  $O$  که مبدا مختصات است متناظر سه تایی مرتبه  $(0, 0, 0)$  می باشد و آنرا نقطه صفر می نامیم.

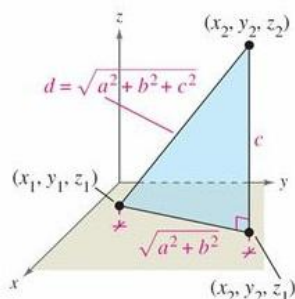
دو نقطه  $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم  $P=Q$  هرگاه مختصات

آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ .

برای یافتن فاصله یک نقطه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x, y, z)$  از مبدا مختصات کافی است از نقطه  $P$  عمودی بر

صفحه  $xy$  رسم کرده و پای عمود را  $P'$  بنامیم. در اینصورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره

خط  $|OP'|$  بصورت زیر محاسبه می شود.

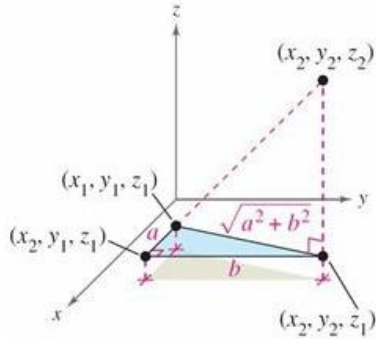


$$|OP'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه  $OPP'$  از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر  $OP$  استفاده می کنیم. پس داریم

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل روبرو برای فاصله دو نقطه دلخواه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x_1, y_1, z_1)$  و



$Q = (x_2, y_2, z_2)$  بصورت زیر تعمیم داد.

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال: در شکل مقابل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از

یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است.

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط

آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.

مثال:

(۱) فرض کنید معادله  $x = 0$  داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با

توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق کند و این یعنی تمام نقاطی

که مولفه اول آنها یعنی  $x$  برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر

در مسئله  $\mathbb{R}^2$  است یا  $\mathbb{R}^3$ . قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در فضای  $\mathbb{R}^2$  محور  $y$ هاست.

حال می‌خواهیم تمام نقاطی از  $\mathbb{R}^3$  را مشخص نماییم که مولفه اول آنها برابر صفر است یعنی تمام سه تاییهایی

به صورت  $(0, y, z)$  به طوری که  $y, z \in \mathbb{R}$ . همانگونه که دیده می‌شود مقدار  $y$  و  $z$  هرچه باشد در صورتی که

مولفه اول نقطه‌ای صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در

معادله  $x = 0$  صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر  $y$  و  $z$  آزاد هستیم. مثلاً نقاط  $(0, -3, -1)$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$  و

$(0, a, b), (0, -1, 5), (0, 0, 0)$  و ... همگی در معادله صدق می‌کنند. در شکل نقاط متعددی که در معادله  $X = 0$  صدق می‌کنند نمایش داده شده است.

با تصویر کردن تمام نقاطی که در معادله  $X = 0$  صدق می‌کنند خواهیم دید که نمودار این معادله صفحه  $XY$  است.

## فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله  $X = 0$  در  $\mathbb{R}^3$  تمام نقاط صفحه  $YZ$  است (به عبارتی  $X = 0$  معادله صفحه  $YZ$  است و دیدیم که نقاط مختلفی با  $Y$  و  $Z$ های دلخواه (مولفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه  $YZ$  به دنبال نقاطی باشیم که مولفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر  $X = 0$  شرط  $Z = 0$  را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه  $YZ$  سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها  $Z = 0$  باشد.)

$$(1) \text{ مختصات چند نقطه را که در رابطه } \begin{cases} X = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \text{ صدق کنند}$$

را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

$$(2) \text{ مقدار مربوط به معادلات } \begin{cases} X = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \text{ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله } X = 0 \text{ دارد؟}$$

## کار در کلاس:

۱. الف) بر روی صفحه  $(X = 1)$ ، نقاطی را که مولفه

دوم آنها برابر ۲ است مشخص نمایید و شکل حاصل از این



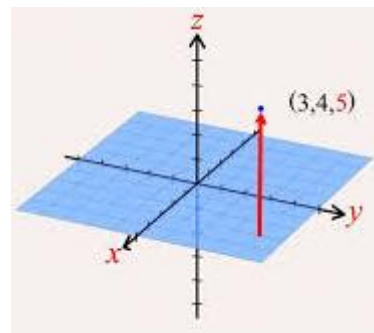
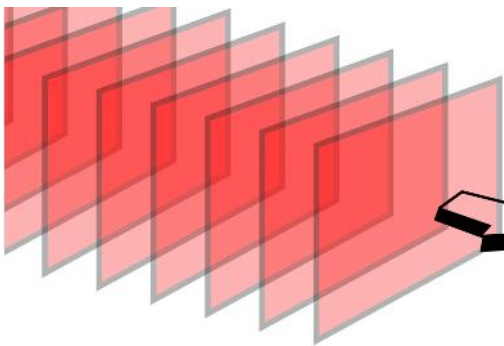
نقاط را توصیف نمایید و معادلات مربوط به آن را بنویسید.

(ب) همین کار را برای نقاطی که مولفه سوم آنها برابر ۱- است انجام دهید.

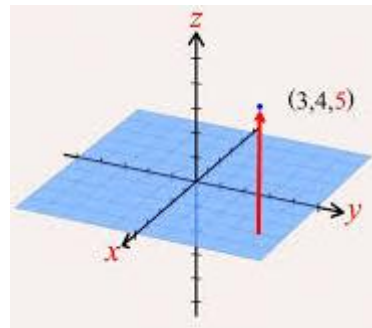
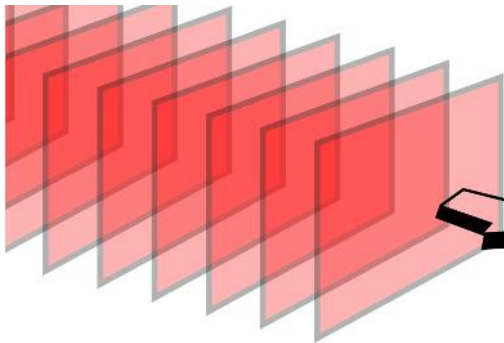
### کار در کلاس

۱- در دستگاه مختصات زیر شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را

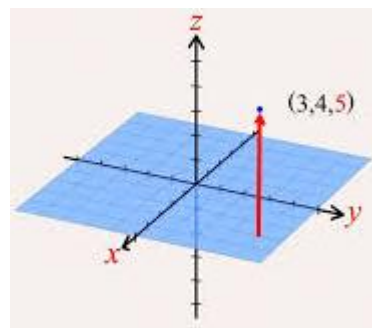
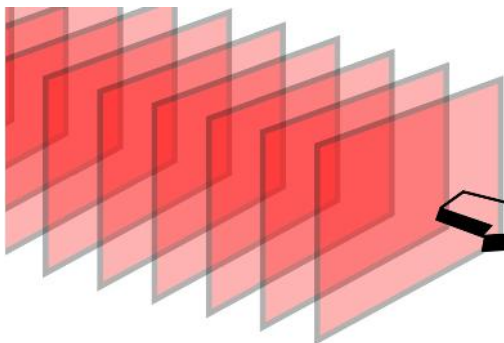
مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.



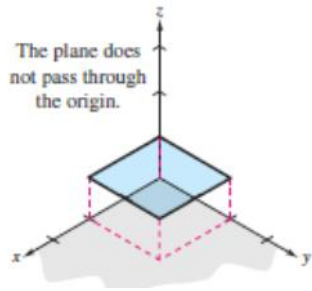
(الف)



(ب)



(پ)



۲- وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل

قسمت هایی از صفحات به معادلات  $x=3$ ،  $x=1$ ،

$y=4$ ،  $y=1$ ،  $z=2$  و  $z=-2$  هستند.

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

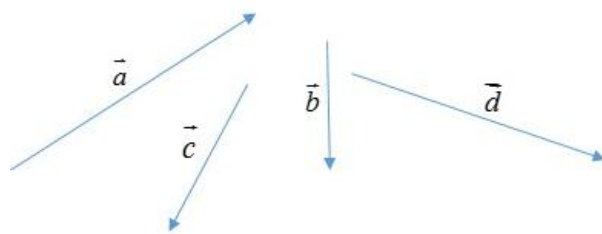
ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقا بر دو تا از وجه ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یالهای این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یالها پاره خط اند و نه خط)

ت) مختصات راس این مکعب مستطیل را بنویسید.

### بردارها در $\mathbb{R}^3$

در سالهای گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت دار یک بردار را نشان می دهد. یک بردار را

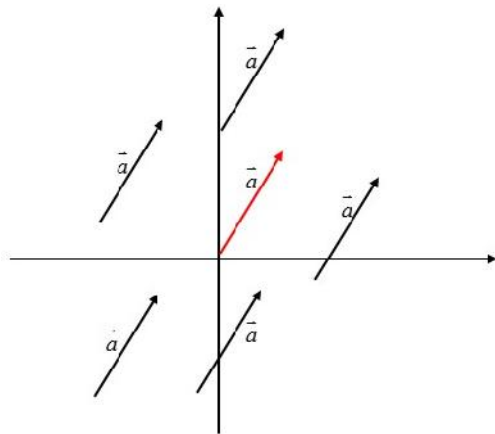


معمولا با حروف کوچک لاتین مانند  $\vec{a}$  و اندازه طول آن

پاره خط را با  $|\vec{a}|$  نمایش می دهند. در شکل روبرو چند

بردار مختلف رسم شده اند.

دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف دو



بردار مساوی  $\vec{a}, \vec{b}$  لزومی ندارد از یک نقطه شروع شده باشند.

در شکل مقابل همه بردارها با هم مساویند زیرا که جهت

و اندازه آنها با هم برابر است. واضح است که می توان بیشمار

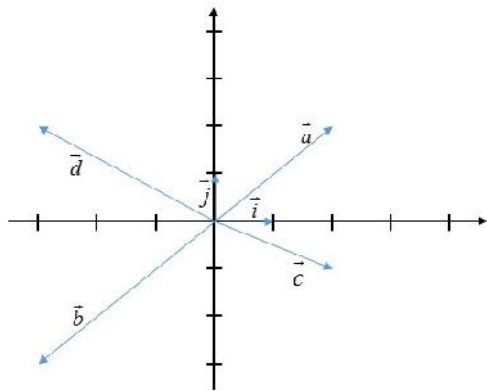
بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت.

به این بردارهای برابر اصطلاحا بردارهای هم ارز گفته می شود.

برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدا باشد و مساوی با دیگر بردارهای همسنگ است را به عنوان نماینده آنها در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ  $\vec{a}$  می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدا مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدا مختصات در نظر گرفته‌ایم، مختصات یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و بر عکس. از اینرو هر بردار مانند  $\vec{a}$  را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  که  $(a_1, a_2)$  مختصات انتهای بردار  $\vec{a}$  می‌باشد.

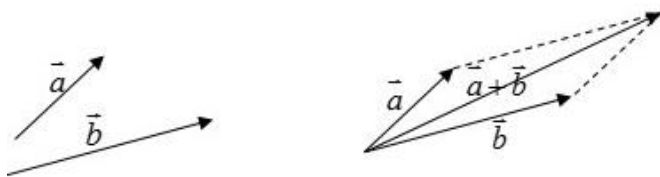
مثال: بردارهای  $\vec{a} = (2, 2)$ ،  $\vec{b} = (-2, -2)$ ،  $\vec{c} = (2, -1)$ ،  $\vec{d} = (-2, 2)$ ،  $\vec{i} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  در دستگاه مختصات زیر رسم شده‌اند.



با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتبهای  $(x, y)$  نمایش می‌دهند در اینصورت مجموعه  $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آنرا با  $\mathbb{R}^2$  نمایش می‌دهند، پس

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

از سالهای قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  از روش متوازی‌الاضلاع بصورت زیر بدست می‌آید و به آن برآیند دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  می‌گویند.



و نیز اگر داشته باشیم  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  می‌توان نوشت

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

همچنین اگر  $r \in \mathbb{R}$  آنگاه

$$r \vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

و به طور خاص وقتی  $r = -1$  یعنی بردار  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$  را قرینه بردار  $\vec{a}$  می نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می توان برای تفاضل دو بردار نوشت

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

بنظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

معمولا مبدا مختصات را بعنوان بردار صفر در نظر می گیرند و با  $\vec{o} = (0, 0)$  نمایش می دهند.

با توجه به اینکه ابتدای برداری مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  مبدا مختصات است، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار  $\vec{a}$  بصورت زیر بدست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

مثال: بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می دهد. یکی از

سخت ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود می وزد. در این

شرایط خلبان می بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر

خط فرود قرار گیرد (به شکل ص بعد رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می گویند. اکنون

فرض کنید مسیرفرود (خط فرود) در جهت بردار  $\vec{l}$  و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود  $\vec{w}$  باشد

(یعنی  $|\vec{l}| = \gamma MN$ ). همچنین باد در جهت بردار  $\vec{w}$  نیرویی معادل  $\gamma MN$  به هواپیما وارد می کند (

$|\vec{w}| = \gamma MN$ ). در هریک از دو وضعیت زیر خلبان هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده

می‌تواند قرار دهد، به طوریکه یک فرود ایمن داشته باشد (یعنی برآیند نیروی محرکه  $(\vec{t})$  و نیز  $\vec{w}$  در جهت

$\vec{l}$  با شرط  $|\vec{l}| \geq |\vec{s}|$  که برآیند است).



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود

اولین تماس هواپیما با باند فرود

هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت

توقف کامل

<p>الف</p>	<p>الف-۱</p>	<p>الف-۲</p>	<p>الف-۳</p>
<p>ب</p>	<p>ب-۱</p>	<p>ب-۲</p>	<p>ب-۳</p>

پاسخ: در مورد وضعیت الف برایندهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) بصورت زیر است.

الف-۱	الف-۲	الف-۲
بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)	بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از است. بنابراین فرود ایمن است.

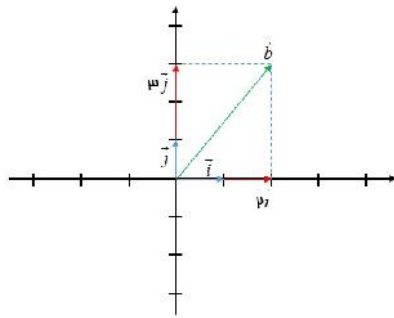
در مورد وضعیت ب برایندهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) بصورت زیر است.

ب-۱	ب-۲	ب-۲
بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برایندها در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)

معمولا بردار به طول واحد در جهت محور X ها را با  $\vec{i}$  و بردار به طول واحد در جهت محور Y ها را با  $\vec{j}$

نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار  $\vec{i} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  و نیز بردار  $\vec{b} = (2, 3)$  بصورت حاصلجمع

مضاربی از  $\vec{i}, \vec{j}$  نمایش داده شده‌اند. بطور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را بصورت زیر

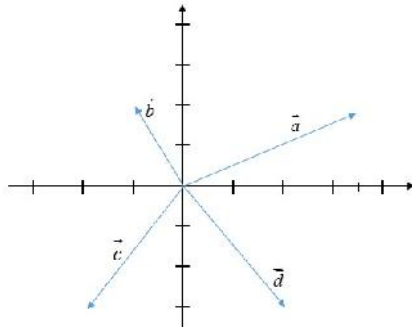


نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$$

### کار در کلاس

۱. در دستگاه مختصات زیر چند بردار داده شده‌است.



الف) مختصات بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه‌های بردارهای  $\vec{b}, \vec{c}$  را رسم کرده و مختصات آنها را بدست آورید.

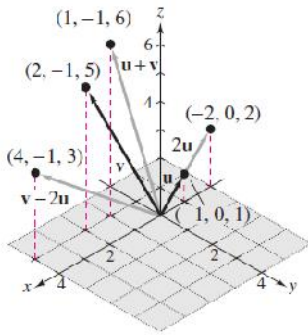
ج) مختصات بردارهای  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{d} - \vec{c}$  را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هریک را بدست آورید.

د) هریک از بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  و  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{d} - \vec{c}$  را برحسب بردارهای واحد  $\vec{i}, \vec{j}$  بدست

آورید.

### بردارها در $\mathbb{R}^2$

مشابه بردارهای  $\mathbb{R}^3$  به هر نقطه از  $\mathbb{R}^3$  برداری که از مبدا شروع می‌شود نظیر کرد. مثلا فرض کنید  $A = (a_1, a_2, a_3)$  نقطه ای غیرصفر از  $\mathbb{R}^3$  باشد. در اینصورت پاره خط جهت داری که از مبدا مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  شروع شده و در نقطه پایان  $A$  پایان می یابد یک بردار در  $\mathbb{R}^3$  را مشخص می کند و آن را با  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  نشان میدهیم. در بردار  $\vec{a}$  مقادیر  $a_1, a_2, a_3$  را مولفه های بردار  $\vec{a}$  می گویند. همچنین قرارداد می کنیم که مبدا مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  نمایشگر بردار  $\vec{o} = (0, 0, 0)$  است که بردار صفر نامیده می شود.



مثال: در شکل روبرو چند بردار در  $\mathbb{R}^3$  نشان داده شده است.

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از  $\mathbb{R}^3$ ، طول هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $\mathbb{R}^3$  از رابطه زیر بدست می آید.

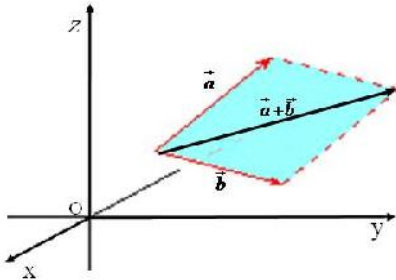
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

حاصلجمع دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  بصورت زیر تعریف می شود که به آن بردار برآیند نیز می گویند.



$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

شکل روبرو بردار های  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$  را در دستگاه  $\mathbb{R}^3$  نشان میدهد.



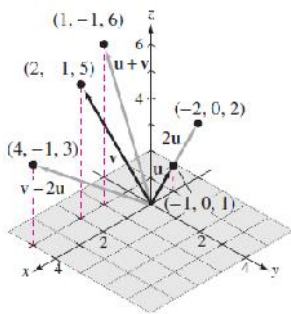
همانطور که از شکل پیداست برای هر دو بردار غیر صفر  $\vec{a}, \vec{b}$

می توان قاعده متوازی الاضلاع را در صفحه ای که از آن دو بردار

می گذرد به کار برد و بردار برآیند  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافت.

برای هر عدد حقیقی  $r$ ، حاصلضرب  $r$  در بردار  $\vec{a}$  را بصورت زیر تعریف می کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$

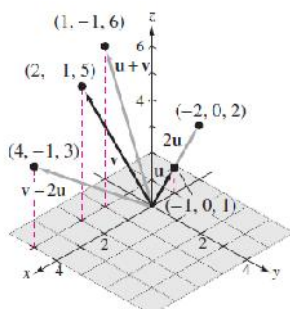


شکل روبرو دو بردار  $r\vec{a}, \vec{a}$  که در آن  $r > 1$  را نشان میدهد.

آیا راستای  $r\vec{a}, \vec{a}$  با هم متفاوتند؟

بطور خاص بردار  $-1\vec{a}$  را که با  $-\vec{a}$  نشان میدهند قرینه  $\vec{a}$  می گویند یعنی  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ . این

بردار هم اندازه با  $\vec{a}$  (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار  $\vec{b}$  از  $\vec{a}$  یعنی  $\vec{a} - \vec{b}$  را بصورت زیر تعریف می کنیم.



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

در شکل روبرو بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}$  و قرینه آن و نیز  $\vec{a}-\vec{b}$  نمایش داده شده اند.

## کار در کلاس

۱. نقاط  $A = (2, 2, 1), B = (-1, 2, 2), C = (2, 1, 0), D = (1, 0, -1)$  را در یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  نشان دهید.

۲. اگر بردارهایی  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  در  $\mathbb{R}^3$  با نقاط انتهایی به ترتیب  $A, B, C, D$  باشند آنگاه آنها را در دستگاه

فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را بدست آورید.

$$\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} =$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} =$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} =$$

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. بطور کلی اگر بردار  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

سه بردار دلخواه و  $O = (0, 0, 0)$  بردار صفر و نیز  $2$  و  $5$  دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابجایی جمع})$$

$$2. \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری در جمع})$$

$$3. \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4. \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5. r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6. (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7. (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8. \text{اگر } r \neq 0 \text{ و } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = r|\vec{a}|.$$

## بردارهای یکه

با بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}$  در صفحه  $\mathbb{R}^2$  به ترتیب در جهت محور  $x$ ها و  $y$ ها آشنا شدید. بطور مشابه در  $\mathbb{R}^3$

بردارهایی با طول واحد زیر را در جهت محورهای مختصات  $\mathbb{R}^3$  در نظر میگیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

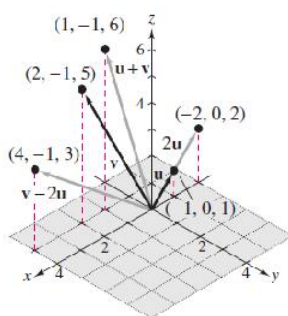
به این ترتیب  $\vec{i}$  بردار واحد در جهت طول ها،  $\vec{j}$  بردار واحد در جهت عرض ها و  $\vec{k}$  بردار واحد در جهت

ارتفاع ها می باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها بسادگی می توان نشان داد که هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  بصورت

ترکیبی از بردارهای واحد  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  قابل بیان است. در واقع داریم

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$



مثال: بردار  $\vec{a} = (2, 2, \frac{1}{3})$  را بر حسب بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  نشان دهید.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

## تمرین

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به

چهارضلعی ABCD را بنویسید.

ب) معادلات مشخص کننده سطح دیگری هم مساحت و موازی سطح ABCD بنویسید.

۲- نقاط با مختصات  $P = (1, 0, 1)$ ،  $Q = (0, -1, -2)$ ،  $R = (2, 0, -1)$  و  $S = (-2, -2, -2)$  را در یک دستگاه

مختصات نمایش دهید.

۳- در سوال قبل طول پاره خط های  $|PQ|$ ،  $|RQ|$  و  $|PS|$  را بیابید.

۴- فرض کنید  $P = (x_1, y_1, z_1)$  و  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ . مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید.

۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف)  $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$ ،  $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ ،  $r = 3$  و  $r\vec{a} - \vec{b} = ?$

ب)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ،  $\vec{b} = (2, 1, -1)$ ،  $r = -1$  و  $r\vec{b} + \vec{a} = ?$

ج)  $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$ ،  $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$  و  $\vec{a} + \vec{b} = ?$

$$r\vec{a} + \vec{b} = ? \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{5}, \quad \vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}, \quad \vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j} \quad (\text{د})$$

۶- طول بردار  $\vec{a}$  را در هر یک از حالات سوال قبل بیابید.