فصل ۲

هندسه

درس اوّل — ترسیم‌های هندسی

درس دوم — استدلال و قضیه تالس

درس سوم — تشابه مثلث‌ها

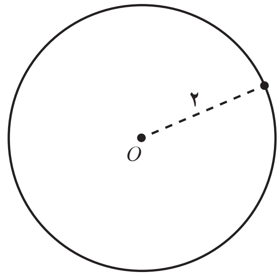
درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

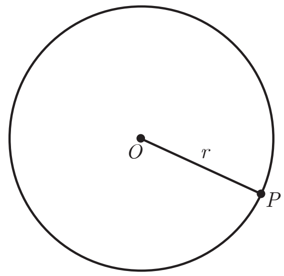
فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

فعالیت کلاسی

۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه مانند O درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند را درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟



۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی این دایره درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟



نتیجه : دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد .... دایره قرار دارد و هر نقطه که .... دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

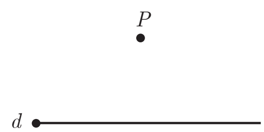
۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص نمایید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

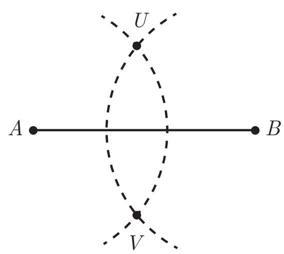
۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد.

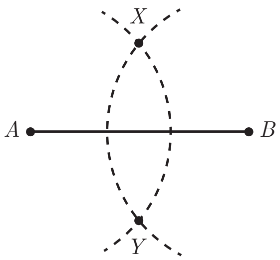
الف) تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ p هستند، مشخص نمایید.

ب) نقاطی از خط d را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص نمایید.



۶ دو نقطهٔ ثابت مانند A و B درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB بازکرده و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر از نقطهٔ B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاطی مانند U و V قطع کنند. نقاط U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟



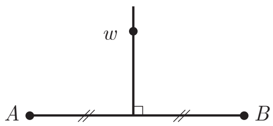


۷ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان بزنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص نمایید.

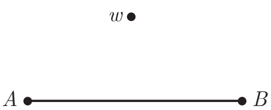
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.

نتیجه۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط ....



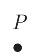
۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(**راهنمایی :** از W به A و B و به وسط AB وصل نمایید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصله یکسان باشد ....

نتیجه : از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد .... و هر نقطه که .... روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی

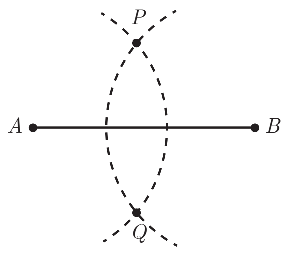


۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید بکشید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید بکشید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند.

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



فرض کنید بخواهیم عمودمنصف پاره‌خط داده شدهٔ AB را رسم نماییم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB بازکرده و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم نمایید.

کار در کلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید به‌طوری که نقطهٔ M وسط A و B باشد.

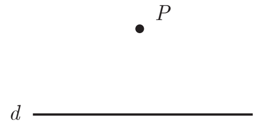
۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطهٔ ....

کار در کلاس

مراحل رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

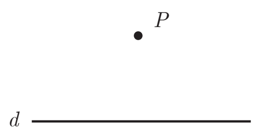
۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d .... و از نقطهٔ ....

کار در کلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d موازی باشد.

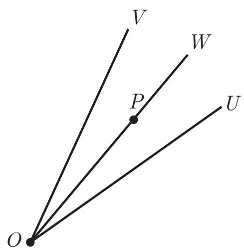
۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

کار در کلاس

روش رسم خط موازی بایک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.

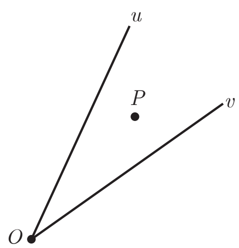
برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط OW نیمساز زاویهٔ VOU می‌باشد. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی OW باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ VOU یکسان است.

(یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر OV و OU رسم نماییم طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه ۱ : هر نقطهٔ روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه ....



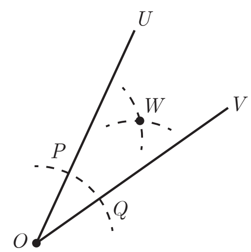
۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ VOU یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی** : پاره‌خط OP و دو عمود از نقطهٔ P بر OU و OV رسم کنید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ UOV است.)

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد ....

نتیجه : از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی .... یک زاویه قرار داشته باشد، .... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی .... آن زاویه قرار دارد.

۳ــ رسم نیمساز یک زاویه



الف) زاویهٔ UOV را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های OU و OV را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

ب) دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول پاره‌خط PQ) و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند.

طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند.

پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم نمایید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

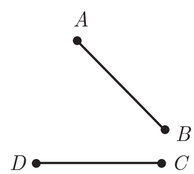
ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ UOV چه نوع پاره‌خطی است؟

کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

تمرین‌های درس اول

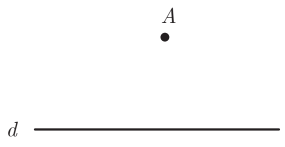


۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل مقابل اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) فرض کنید نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O بنامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصف BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رئوس چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیم‌سازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



۴ الف) نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر، مانند شکل مقابل مفروض است. مثلثی متساوی‌الساقین رسم کنید که یک رأس آن نقطهٔ A و یک ضلع آن برخط d منطبق باشد.

ب) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید.
می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.
می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق نماییم، کماکان تساوی برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم و یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، کماکان تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفر هستند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(طرفین وسطین) الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

(تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب) ب) $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(معکوس کردن تناسب) پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(تعویض جای طرفین با وسطین) $(\frac{a}{c}=\frac{b}{d})$ ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) $(\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d})$ ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دوطرف تساوی عدد ۱ را اضافه نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه نمایید.

(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج) $(\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d})$ ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم نمایید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده سپس از دوطرف عدد ۱ را کم نمایید.

۲ــ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل نمایید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲} \Rightarrow ۵\times \underline{\quad} = ۱۵\times \underline{\quad}$

ب) $۳\times ۴۰ = ۱۲\times ۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{\quad}=\frac{۱۲}{\quad}$

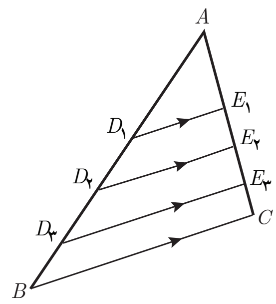
پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷}=\underline{\qquad}$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱}=\underline{\qquad}$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۴}{۱۸}=\underline{\qquad}$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow \frac{-۷}{۱۲}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۵}{-۷}=\underline{\qquad}$

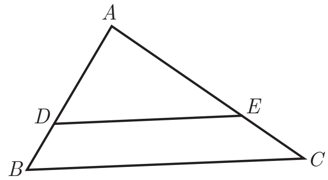
استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن



در شکل مقابل داریم $D_1E_1 \| BC$ و $D_2E_2 \| BC$ و $D_3E_3 \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $1 \le i \le 3$

ـ اندازه پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$\frac{AD_1}{D_1B}$	$\frac{D_2E_2}{BC}$	$\frac{AE_1}{E_1C}$
$\frac{AD_2}{D_2B}$	$\frac{D_3E_3}{BC}$	$\frac{AE_3}{E_3C}$
$\frac{AD_3}{D_3B}$	$\frac{D_1E_1}{BC}$	$\frac{AE_2}{E_2C}$



ـ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

_____ = _____ = _____

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

تالس

در پایه‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

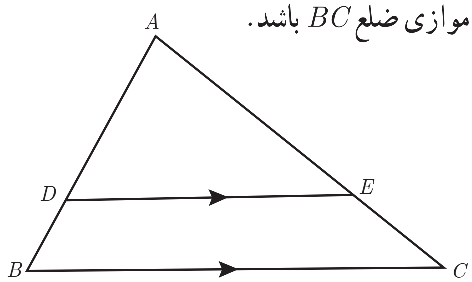
این نوع از استدلال که از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

نوع دیگری از استدلال که با آن نیز در پایه‌های قبل آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم ثابت خواهیم کرد.

فعالیت کلاسی

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.



۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کرده و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کرده و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

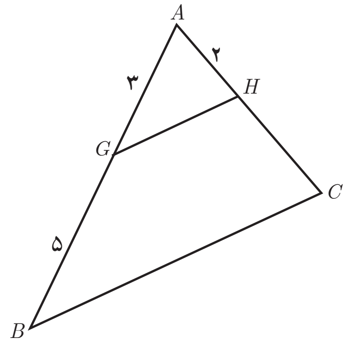
۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

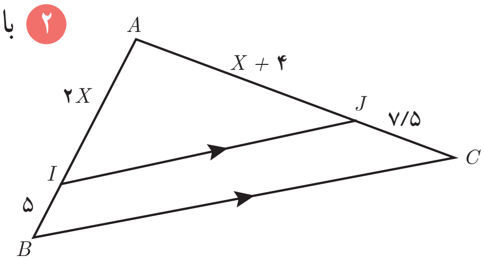
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.
نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس (توضیح) می‌باشد که همان‌گونه که مشاهده کردید رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید را مشخص می‌نماید.

کار در کلاس ۱



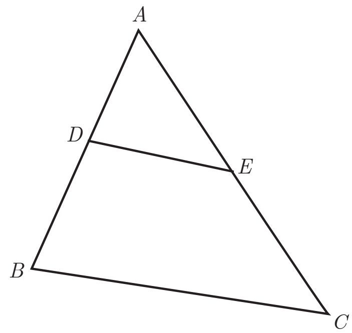
۱ در شکل مقابل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



۲ با تشکیل یک معادله مقدار X و سپس اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

تعمیم قضیه تالس

فعالیت کلاسی



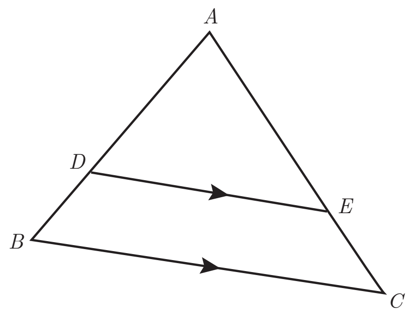
۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

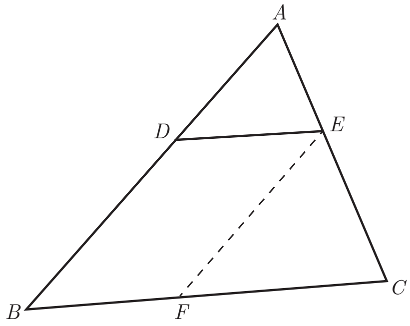
ج) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

د) توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس می‌باشند.



۲ در مثلث مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC می‌باشد. ابتدا تناسب معرفی شده در قضیه تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب، تناسب‌های دیگری که از آن می‌توان نتیجه گرفت را بنویسید.

$$\frac{AD}{DB}= \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}= \qquad \frac{BD}{BA}= \qquad \frac{AB}{BD}= \\ \frac{AD}{AB}= \qquad \frac{AB}{AD}= \end{cases}$$



۳

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیه تالس داریم : (۱) $\frac{AD}{AB}=$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم : (۲) $\frac{BF}{BC}=$

ج) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

د) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی است؟

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=$

هـ) با توجه به قسمت‌های (ج) و (د) داریم :

(این رابطه تعمیم قضیه تالس می‌باشد) $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

کار در کلاس ۱

۱ در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص نمایید.

الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$

اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

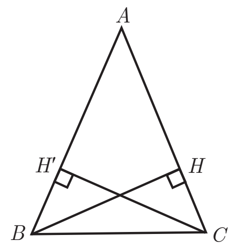
مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ــ با توجه به این مثال جاهای خالی را پر کنید.

مثال ۲ :



قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند،آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

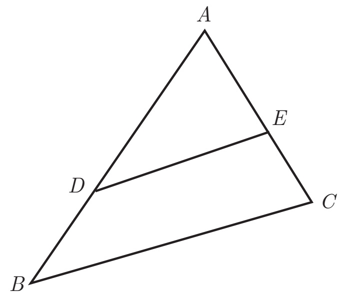
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیراند.

فرض : $DE \parallel BC$

حکم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

لذا عکس قضیه تالس به‌صورت زیر می‌باشد :

فرض : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

حکم : $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC می‌باشد. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبررا اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی ازچند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزارهٔ مرکب می‌گویند؛مثلاً گزاره‌های «فردا سه‌شنبه است» و «ده عددی فرد است»، هر کدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا سه‌شنبه است و ده عددی فرد است» یک گزارهٔ مرکب است.

مثال :

الف) جمله‌های زیرگزاره‌اند :

ــ علی به مدرسه آمد.

ــ ۲۳ عددی اول است.

ــ $100 < 0$

ــ عدد اول زوج وجود ندارد.

ب) موارد زیر گزاره نیستند :

ــ چه رنگ زیبایی!

ــ آیا قطرهای لوزی بر هم عمودند؟

ــ از روی صندلی بلند شو.

ــ شاعران فارسی زبان افراد خوبی هستند.

ــ آیا عدد ۴۳ اول است؟

ــ یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید.

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست.

نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) **گزاره :** «۲۳ عددی اول است»

نقیض آن : «چنین نیست که ۲۳ عددی اول باشد.» که معادل است با «۲۳ عددی اول نیست.»

ب)**گزاره :** «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a یا کوچک‌تر از b است و یا با b برابر است.»

پ) **گزاره :** «هر صندلی، چهار پایه دارد.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که هر صندلی چهار پایه داشته باشد.» که معادل است با «صندلی‌ای وجود دارد که چهار پایه ندارد.»

ت) **گزاره :** «یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن برابر 180° نیست.»

نقیض گزاره : «چنین نیست که یک مثلث وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست». که معادل است با «هر مثلثی مجموع زوایای داخلی‌اش 180° است».

ث) گزاره : «هیچ کتابی بی‌ارزش نیست».

نقیض گزاره : «چنین نیست که هیچ کتابی بی‌ارزش نیست». که معادل با «کتابی وجود دارد که بی‌ارزش است».

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی به‌کار برده می‌شود، **برهان غیر مستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow$ B (حکم)

اثبات به روش برهان خلف :

A درست و B نادرست $\underbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$

۱ A درست نیست

۲ تناقض منطقی

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است. زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

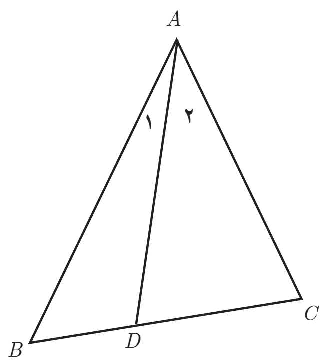
مثال : اگر $n\in \mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله غلط باشد یعنی n عددی فرد نباشد. لذا n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n=۲k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^۲=۴k^۲=۲(۲k^۲)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض می‌باشد. لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD\neq DC$، آن‌گاه $AB \neq AC$.

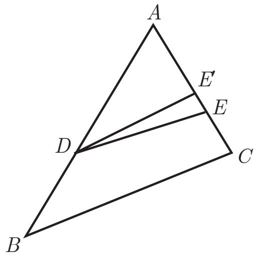


حل :

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم غلط باشد.

بنابراین داریم $AB=AC$ در این صورت خواهیم داشت $A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$ (چرا؟). از این همنهشتی نتیجه خواهد شد $BD=DC$، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB=AC$ غلط بوده است. بنابراین $AB\neq AC$.

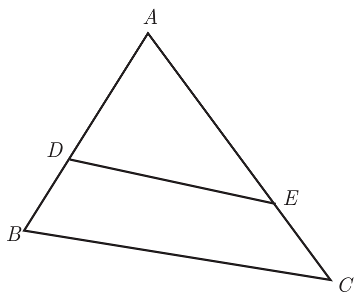
حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنیم.



عکس قضیهٔ تالس : اگر مانند شکل مقابل در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ و با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$.
حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE'}{AC}=\frac{AE}{AC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد یعنی $DE \parallel BC$.

قضیه‌های دو شرطی



همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند، بنابراین به‌طور مثال برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :

اگر $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$[1] (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :
فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} .$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال : در یک مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند، لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

مثال نقض

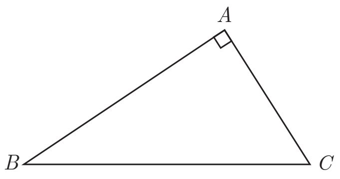
نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند» این یک حکم کلی در مورد تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که از آن برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.
به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال فیلدز[۱] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید. اگر شما حتی یک فرد ایرانی که مدال فیلدز گرفته است را برای او مثال بزنید در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض ادعای او را باطل کرده‌اید.
با دقت در ادعای مطرح شده خواهید دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. در چنین مواقعی که حکمی کلی برای تمام اعضای یک مجموعه بیان می‌شود. آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد. در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آورده شده‌اند.
الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی در مورد تمام اعداد اول)
ب) «در هر متوازی‌الاضلاع اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام متوازی‌الاضلاع‌ها)
پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)
دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت نمایید؟
می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین **مثال نقض** رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟
آیا اگر برای رد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، باید درستی آن را بپذیریم؟ برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه نماییم.**» دربارهٔ گزینهٔ

۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند، تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. و در سال ۲۰۱۴ به ریاضی‌دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت.

پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین‌های درس دوم

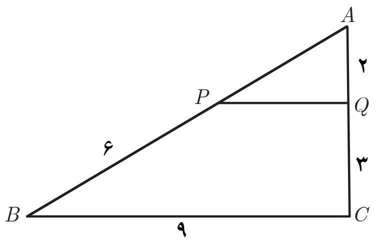


۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.

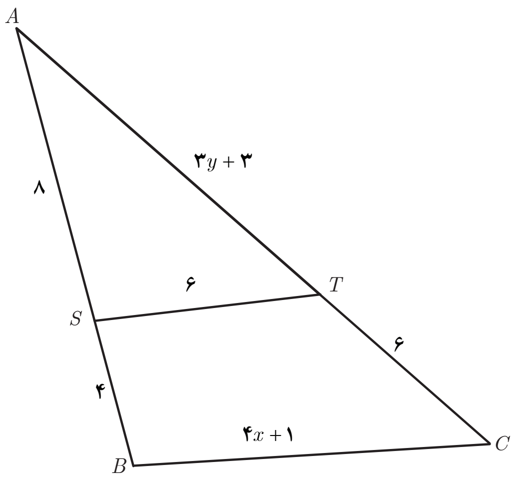
۲ در هر مورد زیر مشخص کنید نسبت $\frac{a}{b}$ برابر با چه عددی است؟

الف) $\frac{a}{10+a}=\frac{b}{8+b}$ ب) $\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b}$

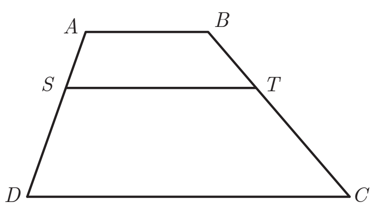
۳ حکمی ارائه کنید که درست نباشد ولی بتوان برای توجیه آن استدلال استقرایی آورد. استدلال استقرایی موردنظرتان را بیان نمایید.



۴ در شکل مقابل $PQ||BC$، طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



۵ در شکل مقابل $ST||BC$، مقادیر x و y را به‌دست آورید.



۶ در ذوزنقه مقابل $AB||ST||DC$، ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(**راهنمایی :** یکی از قطرها را رسم کنید.)

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه داده شده است را بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در اینصورت زوایای مقابل برابرند.

ج) اگر رأس‌های یکی چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در اینصورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

د) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر». (**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ گزاره بودن یا نبودن و دلیل آنرا در هر مورد مشخص نمایید.

الف) چه کوه بلندی!

ب) آیا ۵ عددی اولی است؟

پ) ۷=۴

ت) قد هیچ انسانی از ۲ متر بلندتر نیست.

ث) ثابت کنید عدد ۳ فرد است.

ج) هر مثلث ۴ رأس دارد.

۹ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۴>۷

ب) هیچ مثلثی با سه ضلع نابرابر وجود ندارد.

پ) ۸ ≥ ۱۷

ت) تمام والیبالیست‌ها از تمام فوتبالیست‌ها بلندترند.

۱۰ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۱۱ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولی که بزرگ‌تر از ۱۲۷ باشد وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

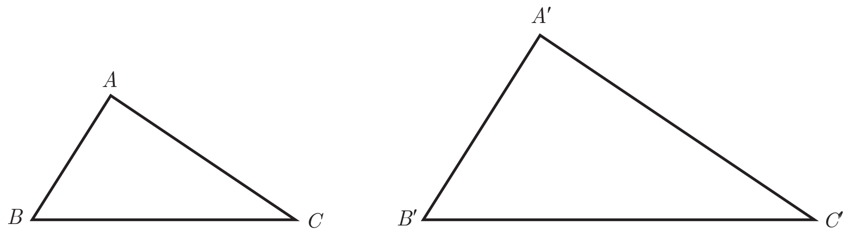
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A'} \text{ و } \hat{B}=\hat{B'} \text{ و } \hat{C}=\hat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

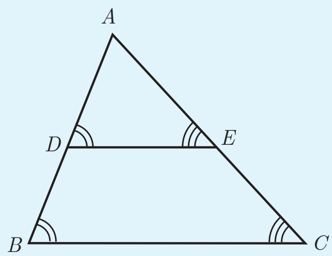


در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است.

دراین‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲ــ با توجه به قضیه تالس داریم :

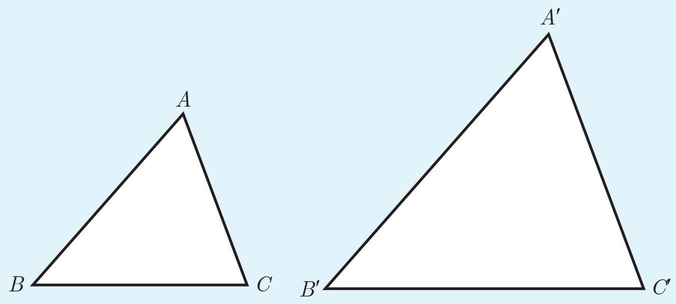
$$\frac{AD}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{DE}{\cdots}$$

۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

$$A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها که بیان شد می‌توان سه قضیهٔ بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مد نظر نمی‌باشد در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

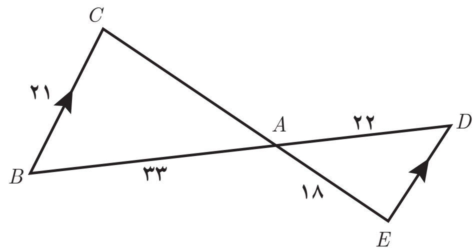
$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

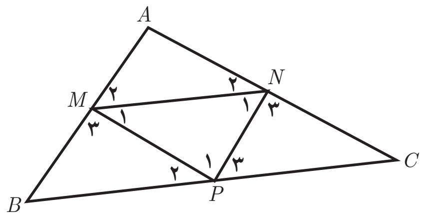
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس

۱ درشکل مقابل اندازهٔ پاره خط CE برابر ۴۵ سانتی‌متر است و $BC \| DE$.
اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید



۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، در مورد مثلث‌های ABC و MNP چه می‌توان گفت؟



حل :

الف) $MN \| BC$ و $NP \| AB$ و $MP \| AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$ و $\hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$ (چرا؟)

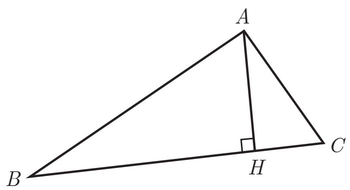
از (ب) در مورد مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ اگرسه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ به گونه‌ای باشند که $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$ ، در مورد دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت کلاسی

فرض کنید مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید
$A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}C$

۲ نشان دهید دو زاویه مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

۳ از (۱) و(۲) در مورد مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow AC^{۲} = \cdots \times \cdots$$

۵ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AB}{\cdots} = \frac{HB}{\cdots} \Rightarrow AB^{۲} = \cdots \times \cdots$$

۶ $$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow AH^{۲} = \cdots \times \cdots$$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC بنویسید.

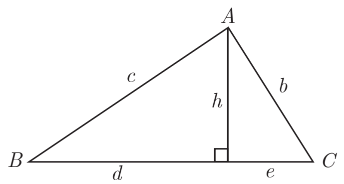
$BC^{۲}=\cdots\cdots+\cdots\cdots$

۸ مساحت مثلث ABC به دو طریق محاسبه کنید و با توجه به آن تساوی زیر را کامل نمایید.

$AB\times\cdots\cdots= AH\times \cdots\cdots$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با کمترین محاسبه ممکن از داده‌ها استفاده کنید و مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱ $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

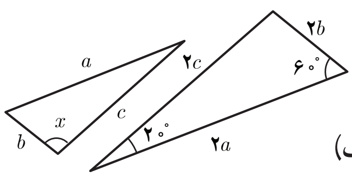
۲ $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

۳ $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

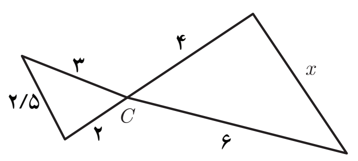
تمرین‌های درس سوم

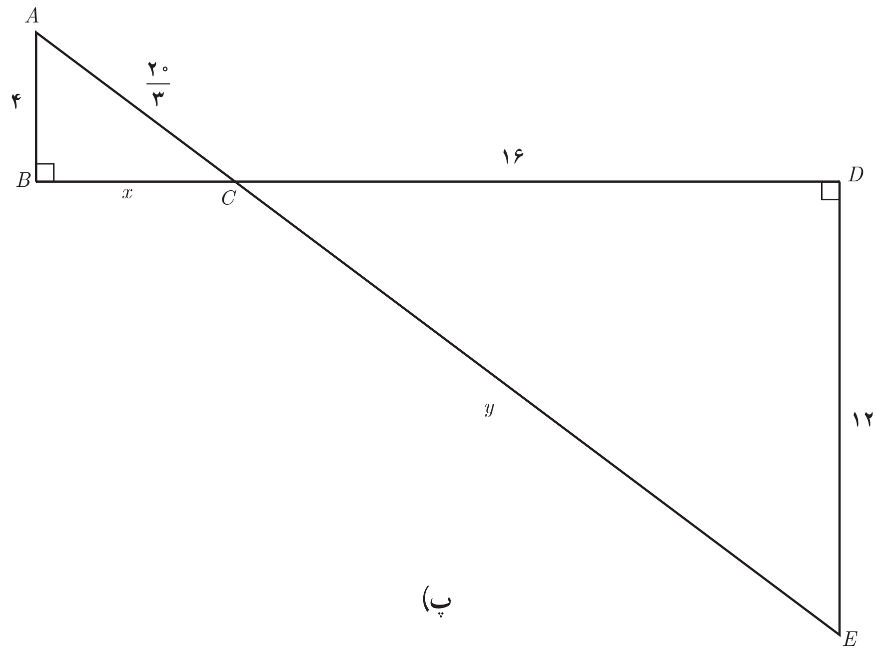
۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

الف)

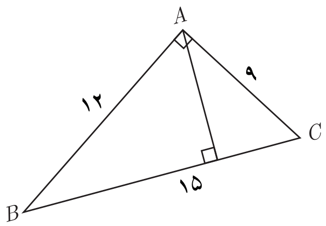


ب)





پ)



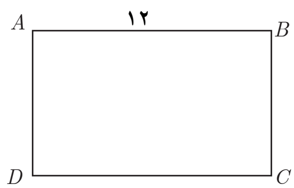
۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

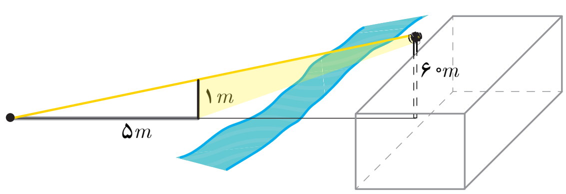
پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

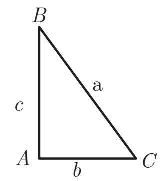
ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

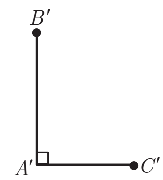


۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه نمایید.

۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است (مانند شکل) فردی که در طرف دیگر رودخانه است می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایه نورافکن محاسبه نماید. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌نماید که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مزد تا پای نورافکن چقدر است؟







۵ (تمرین ۸ صفحه ۴۴ از کتاب هندسه پایهٔ دهم رشته ریاضی)

با قضیه فیثاغورس آشنا شوید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱ــ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$. بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

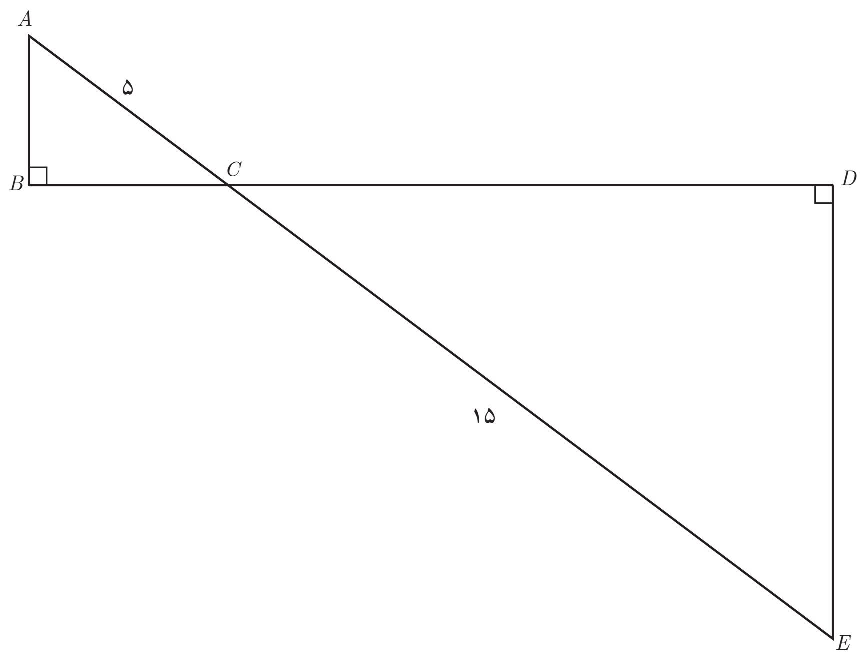
۲ــ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.

۳ــ با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

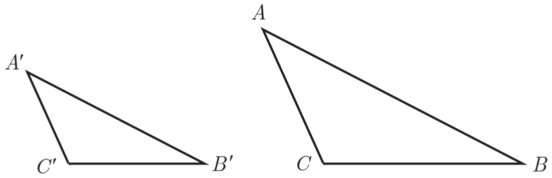
۴ــ توضیح دهید چرا $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

۶ در شکل زیر دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



۷ دو مثلث دلخواه به نام‌های ABC و $A'B'C'$ را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که متشابه با نسبت تشابه K باشند و داشته باشیم $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$. ارتفاع‌های AH و



$A'H'$ را در دو مثلث رسم نمایید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

۸ دو n ضلعی دلخواه را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که متشابه با نسبت تشابه K باشند ورئوس آنها را به دلخواه نام‌گذاری نمایید.

الف) نسبت محیط‌های دو n ضلعی را به هم محاسبه نمایید.

ب) نسبت مساحت‌های دو n ضلعی را به هم محاسبه نمایید. (**راهنمایی**: برای محاسبهٔ مساحت هر کدام از چند ضلعی‌ها می‌توانید یک رأس را به تمام رئوس غیرمجاور با آن رأس وصل نمایید و به‌جای مساحت n ضلعی مساحت مثلث‌های ایجاد شده را محاسبه نمایید.)