فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

درس اوّل — تابع نمایی و ویژگی‌های آن

درس دوم — تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

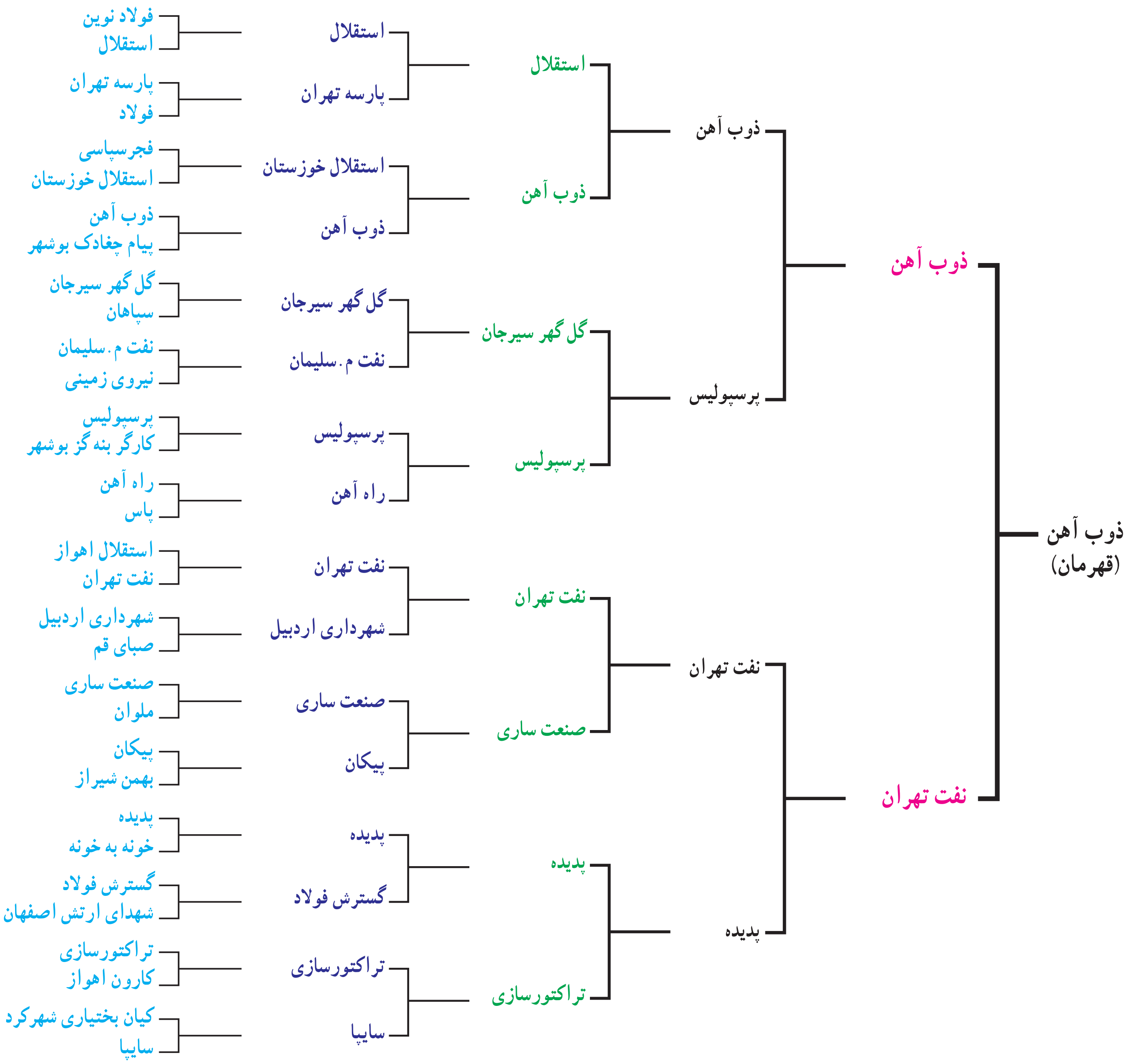
درس سوم — نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اوّل

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت کلاسی ۱

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴ـ۹۳ باشرکت ۳۲تیم ودر پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا فینال به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می بینید در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود وتیم بازنده حذف می‌شود. (به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.)



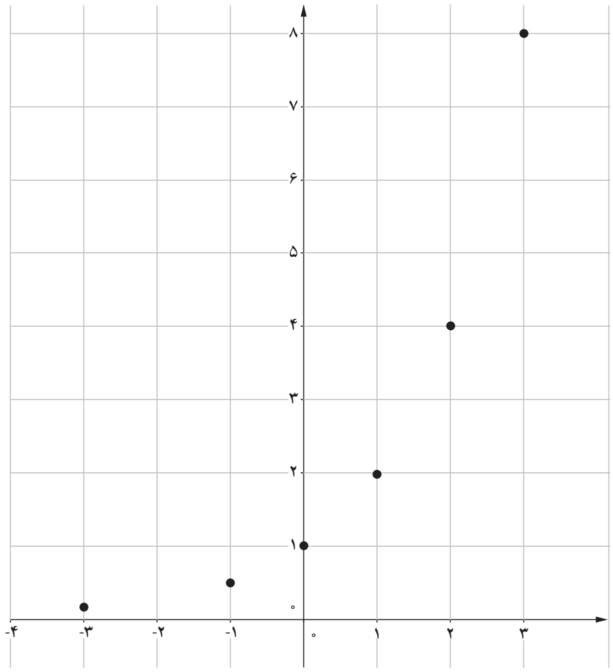
۱ درفینال چند تیم حضور دارند؟..
۲ در مرحلهٔ قبل از فینال چند تیم حضور دارند؟...
۳ تعداد تیم ها در هرمرحله با تعداد تیم ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟...
۴ چه رابطه ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟ ....
۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم های اولیه چند تاست؟........................
۶ اگر تعداد مراحل x وتعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟...

فعالیت کلاسی ۲

۱ جدول روبه‌رو را کامل نمایید.

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
۲^x	$\frac{۱}{۸}$	......	$\frac{۱}{۲}$	......	۲	......	۸

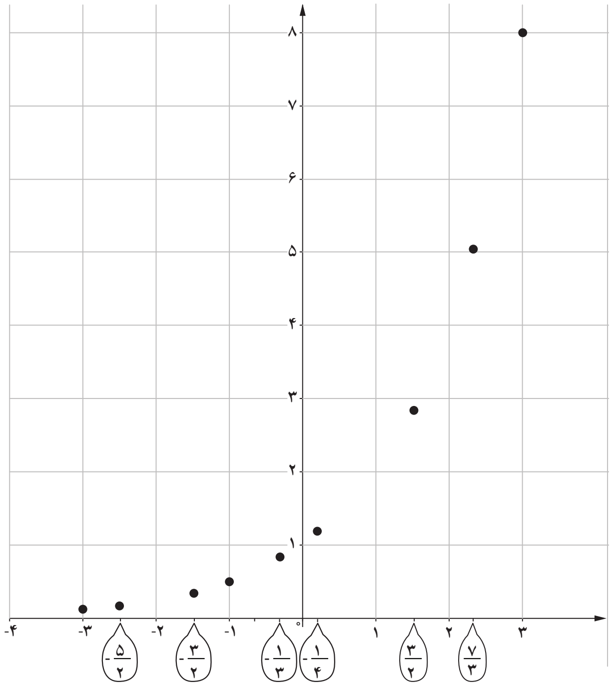
۲ نقاط جدول فوق را در نمودار روبه‌رو مشخص نموده و به هم وصل کنید.



۳ آیا نقاطی دراین جدول وجود دارد که دارای طول یکسان باشند؟

۴ جدول زیر را کامل نمایید.

x	−۴	−۳	$-\frac{۵}{۲}$	−۲	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۷}{۳}$	۳
۲^x	....	$\frac{۱}{۸}$	~۰/۱۷	....	~۰/۳	$\frac{۱}{۲}$	~۰/۸	...	~۱/۲	...	~۲/۸	....	~۵	....



۵ نقاط جدول فوق را در نمودار روبه‌رو مشخص نموده و به هم وصل کنید. ....

۶ آیا نقاطی در این جدول وجود دارد که دارای طول یکسان باشند؟

....

۷ آیا به نظر شما این دو نمودار نشان دهندهٔ یک تابع هستند؟ چرا؟

....

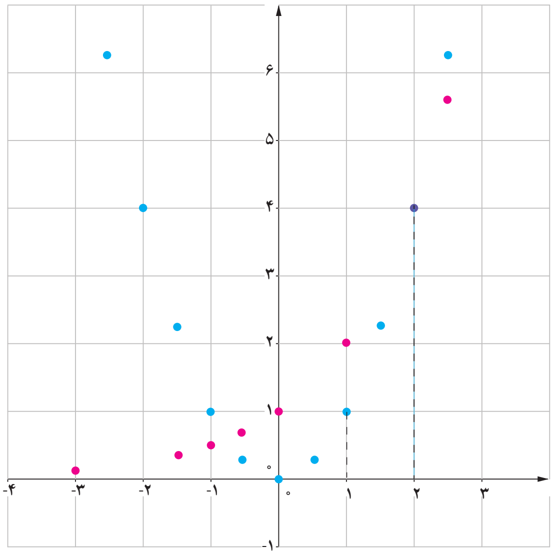
تعریف : هر تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ که $a\in IR$ و $a>۰$، $a\neq ۱$، و تابع نمایی نامیده می شود. مانند : $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ و...

کار در کلاس ۱

۱ نمودارهای توابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول های زیر رسم نمایید.

x	$-\frac{۵}{۲}$	....	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^۲$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	....	۶/۲۵

x	−۳	−۲	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=۲^x$	$\frac{۱}{۸}$	....	~۰/۳	$\frac{۱}{۲}$	~۰/۷	....	....	۲	۴	~۵/۶۸

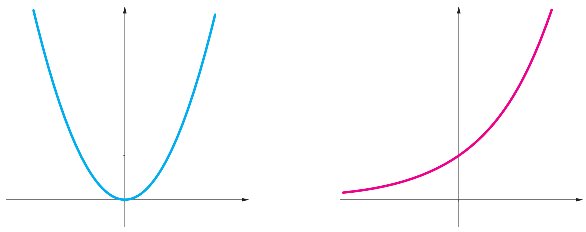


۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳ در چه نقاطی مقادیر ۲^x و $x^۲$ باهم مساوی هستند؟ ....

۴ در $x^۲$، متغیر در.....و عدد ثابت در.....است ولی در ۲^x،.... درتوان و....درپایه است.

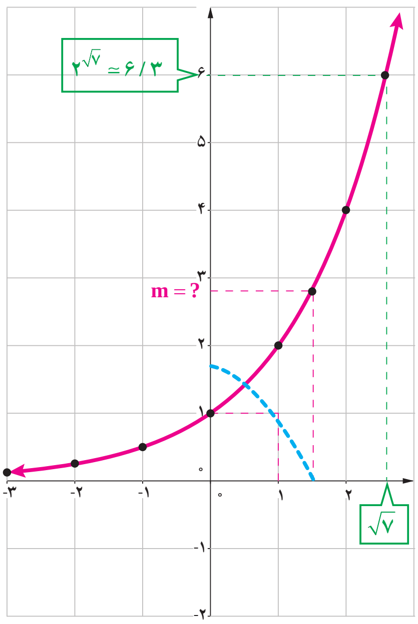
راهنمایی : نمودارهای توابع با ضابطه های $y=۲^x$ و $y=x^۲$ به صورت زیر می‌باشند :



نمودار $x^۲$ نمودار ۲^x

فعالیت کلاسی ۳

درشکل روبه‌رو نمودار تابع نمایی $y=۲^x$ رسم شده است .



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض ها چه نقطه‌ای است؟

....

۲ دامنه وبرد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

....

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

....

۴ دراین نمودار، مقدارm نشان دهندهٔ چه عددی است؟ مقدار تقریبی آن را با استفاده از نمودار به دست آورید.

....

۵ به صورت مشابه، عدد $۲^{\sqrt{۵}}$ را مشخص کرده و مقدار تقریبی آن را با استفاده از نمودار به دست آورید. ....

۶ به نظر شما کدام یک از اعداد زیر بین $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارند؟

۱) $۲^{-۱}$ ۲) $۲^۵$ ۳) $۲^{\frac{۵}{۲}}$ ۴) $۲^{\frac{۳}{۲}}$

۷ کدام‌یک از اعداد زیر بین $۲^{۰/۵}$ و $۲^{۰/۱}$ قرار دارند؟

۱) $۲^{-۰/۳}$ ۲) $۲^{۰/۳}$ ۳) $۲^{۰/۸}$ ۴) $۲^۰$

۸ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟ ....

۹ فرض کنیم رابطهٔ $۲^z>۲^y>۲^x$ برقرار است،با توجه به سؤال ۸، چه رابطه‌ای بین x وy و z برقرار است؟ ....

کار با ماشین حساب

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه $\boxed{x^y}$ وجود دارد که با استفاده از آن می توانید مقادیر اعداد توان دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبهٔ $۲^۵$، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید و سپس دکمهٔ $\boxed{x^y}$ و بعد عدد ۵ و سپس دکمهٔ تساوی را فشار می دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم.

تذکر : دربرخی از ماشین حساب‌ها به‌جای دکمهٔ x^y، نمادی به صورت $\boxed{\wedge}$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.(تا یک رقم اعشار)

$\boxed{۲} \to \boxed{x^y} \to \boxed{(} \to \boxed{۲} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \to \boxed{۲/۶}$

۱) $۲^{\sqrt{۲}}$

۲) $۲^{\sqrt{۸}}$

۳) $۲^{۰/۱}$

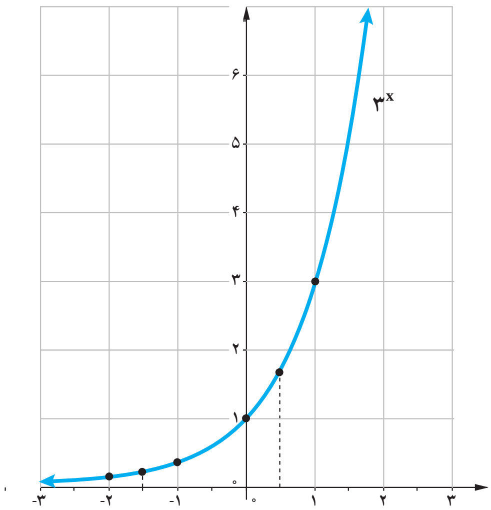
۴) $۲^{-۰/۵}$

۵) $۲^{۱+\sqrt{۳}}$

کار در کلاس ۲

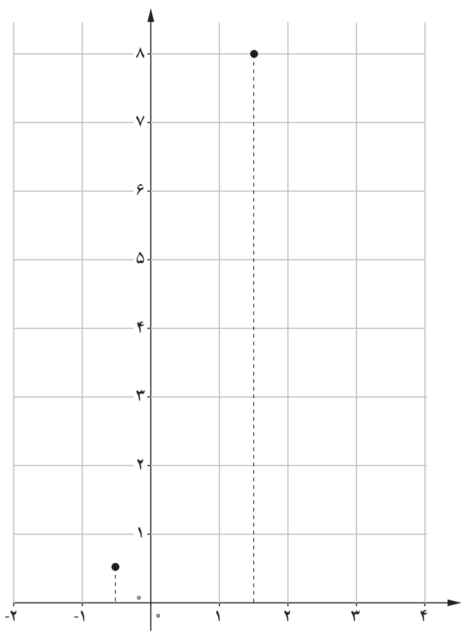
نمودار تابع $y=۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

x	$y=۳^x$
-۲	$\frac{۱}{۹}$
$-\frac{۳}{۲}$	$\sim ۰/۱۹$
-۱	$\frac{۱}{۳}$
۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\sim ۱/۷$
۱	۳



۱ جدول زیر را کامل نمایید و با استفاده از آن نمودار تابع $y=۴^x$ را رسم نمایید.

x	$y=۴^x$
.....	$\frac{۱}{۴}$
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	.....
$\frac{۱}{۲}$	.....
$\frac{۳}{۲}$	۸



۲ دامنه وبرد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. ....

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{۲/۵} \bigcirc ۳^{\frac{۷}{۳}}$ ب) $۴^{\sqrt{۷}} \bigcirc ۴^{\sqrt{۵}}$

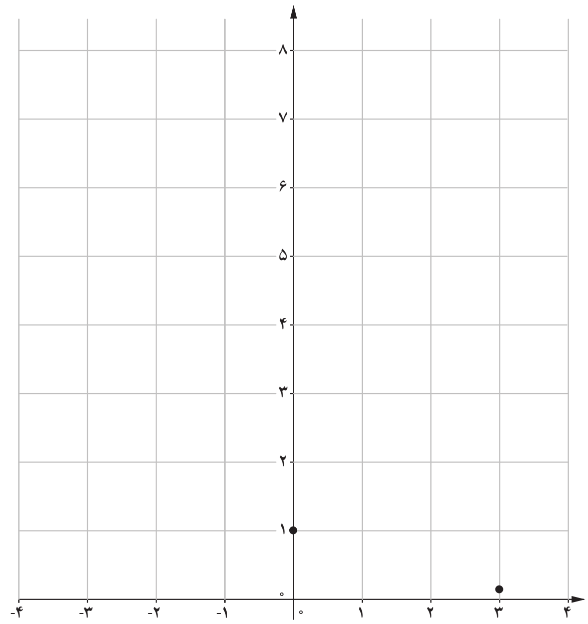
۴ اگر x<y، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{x} \bigcirc ۳^{y}$ ب) $۴^{x} \bigcirc ۴^{y}$

فعالیت کلاسی ۴

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	……	۰	۱	……	۳	……
$y=(\frac{۱}{۲})^{x}$	……	……	$\sqrt{۲}$	۱	……	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۸}$	……



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور yها چه نقطه‌ای است؟

....

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

....

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

....

....

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^{۰/۵} \bigcirc (\frac{۱}{۲})^{۱/۵}$ ب) $(\frac{۱}{۲})^{-۴} \bigcirc (\frac{۱}{۲})^{۴}$ ج) $(\frac{۱}{۲})^{۳} \bigcirc (\frac{۱}{۲})^{۴}$

۶ اگر x<y، چه رابطه ای بین $(\frac{۱}{۲})^{y}$ و $(\frac{۱}{۲})^{x}$ وجود دارد؟ ....

کار در کلاس ۳

درتابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{۲})^x$ داریم :

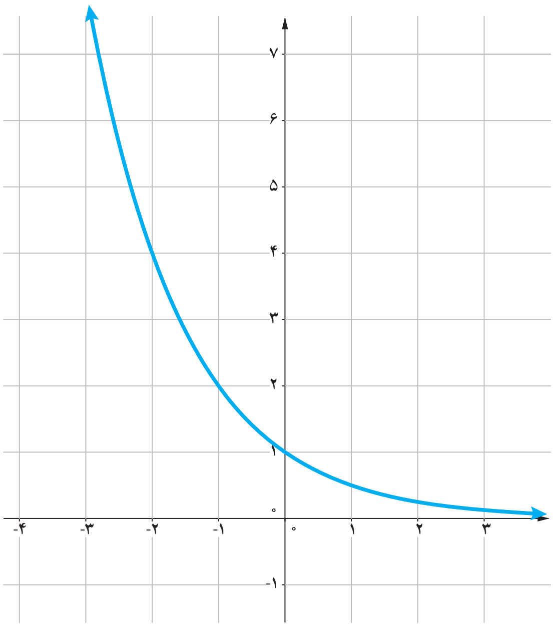
x	$(\frac{1}{۲})^{۱}$	$(\frac{1}{۲})^{۲}$	$(\frac{1}{۲})^{۵}$	$(\frac{1}{۲})^{۱۰}$	$(\frac{1}{۲})^{۵۰}$	$(\frac{1}{۲})^{۱۰۰}$	$(\frac{1}{۲})^{۲۰۰}$
$y=(\frac{1}{۲})^x$	↓ ۰/۵	↓ ۰/۲۵	↓ ۰/۰۳~	↓	↓	↓	↓ ......

۱ اگر اعداد سطر اول کوچک و کوچک تر شوند آیا صفر در سطر دوم ظاهر می شود؟

....

۲ آیا نقطه ای روی محور xها وجود دارد که نمودار $(\frac{1}{۲})^x$ از آن عبور کند؟ یا به عبارت دیگر آیا نمودار $(\frac{1}{۲})^x$ محور xها را قطع می کند؟ چرا؟

....

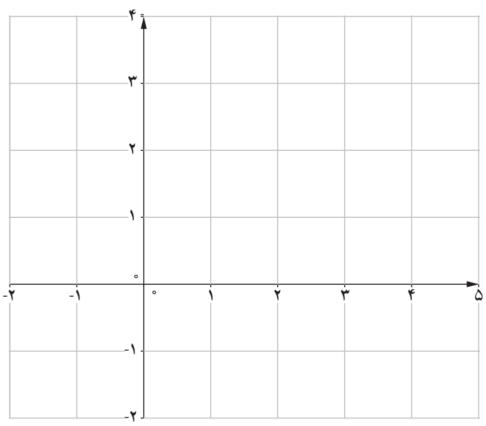


نرم افزار جئوجبرا(Geo Gebra)

با استفاده از نرم افزار جئوجبرا (Geo Gebra) می توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم نمایید. برای این کار در نوار دستور،ضابطهٔ تابع را تایپ کرده وکلید Enter را بزنید. در پنجرهٔ گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس ۴

نمودار تابع $y=(\frac{1}{۳})^x$ را رسم نمایید.



توان‌های حقیقی

درسال دهم، با قوانین مربوط به اعداد توان دار با توان‌های گویا وپایه های حقیقی مثبت آشنا شدید. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است. یعنی اگر xو y دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، داریم :

۱) $x^{۰}=۱$

۲) $x^{-r}=\dfrac{۱}{x^{r}}$

۳) $x^{r}\times x^{s}=x^{r+s}$

۴) $(x^{r})^{s}=x^{rs}$

۵) $(xy)^{r}=x^{r}.y^{r}$

۶) $(\dfrac{x}{y})^{r}=\dfrac{x^{r}}{y^{r}}\ (y\neq ۰)$

۷) $\dfrac{x^{r}}{x^{s}}=x^{r-s}\ (x\neq ۰)$

فعالیت کلاسی ۵

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل نمایید.

۱ دامنهٔ تابع $y=a^{x}$ ($a>۱$) اعداد حقیقی وبرد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع $y=a^{x}$ ($۰<a<۱$) .... وبرد آن بازهٔ $(۰ , +\infty)$ است.

۳ نمودار این دو تابع محورyها را درنقطهٔ .... قطع می‌نماید و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

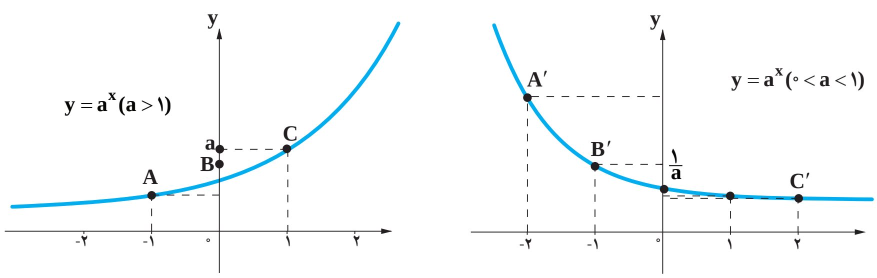
۴ این دو تابع، یک به یک .... زیرا خطوط موازی محورxها، نمودار آنها را رقطع می‌کند.

۵ نمودار این توابع در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر می باشد. مختصات نقاط زیر را تکمیل نمایید.

$A(-۱,.........)\ ,\ A'(-۲,.........)$

$B(۰,.........)\ ,\ B'(.........,\dfrac{۱}{a})$

$C(.........,a)\ ,\ C'(۲,.........)$



معادلات و نامعادلات نمایی

معادلهٔ نمایی

اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x=b^y$، آن گاه $x=y$ وبه عکس. مثلاً تساوی $۲^x=۲^۸$ نتیجه می‌دهد که $x=۸$.

مثال : معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \to ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \to ۲x-۳=۴ \to x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \to (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \to ۴x-۲=۳x+۳ \to x=۵$

ج) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \to ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \to ۳n-۱=۶n+۳ \to n=-\frac{۴}{۳}$

نامعادلهٔ نمایی :

اگر $b>۱$، آن گاه $b^x \geq b^y$ اگر وتنها اگر $x \geq y$. مثلاً اگر $۵^x<۵^۴$ آن گاه $x<۴$.
همچنین اگر $۰<b<۱$، آن گاه $b^x \geq b^y$ اگر وتنها اگر $x \leq y$. مثلاً اگر $(\frac{۱}{۲})^x \geq (\frac{۱}{۲})^۳$ آن گاه $x \leq ۳$.

مثال :

الف) $۴^{۳p-۱}>\frac{۱}{۲۵۶} \to ۴^{۳p-۱}>۴^{-۴} \to ۳p-۱>-۴ \to p>-۱$

ب) $۲^{x-۳} \leq \frac{۱}{۳۲^۳} \to ۲^{x-۳} \leq (۲^{-۵})^۳ \to x-۳ \leq -۱۵ \to x \leq -۱۲$

ج) $(\frac{۱}{۳})^{۲n+۵} < (\frac{۱}{۳})^۷ \to ۲n+۵>۷ \to ۲n>۲ \to n>۱$

تمرین‌های درس اول

۱ نمودار هر دسته از توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آنها را نسبت به هم مقایسه کنید.

الف) $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=۵^x$

ب) $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۳})^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$

۲ کدام یک از توابع یا نمودارهای زیر،متعلق به یک تابع نمایی است؟

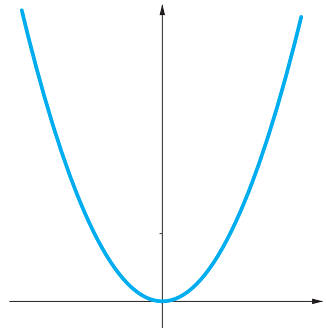
الف) $y=۲x^۲-۳x+۱$

ب) $y=x^۳$

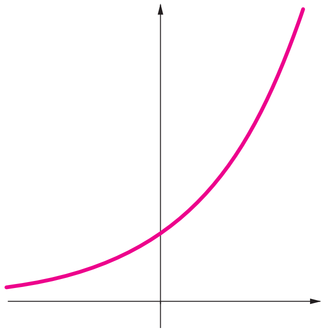
ج) $y=\frac{x-۱}{۲x+۱}$

د) $y-۳x=۲$

و)



هـ)



۳ کدام یک از جدول های زیر، نقاط متعلق به نمودار یک تابع نمایی را مشخص می کند؟

الف)

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{۱}{۴}$	۱	۴	۱۶	۶۴

ب)

x	−۲	−۱	۰	۱	۳	۵
y	−۳	−۱	۱	۳	۷	۱۱

ج)

x	−۳	−۲	۰	۲	۳
y	۲۷	۹	۰	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$

د)

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	$\frac{۵}{۲}$	۱	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۴}{۲۵}$	$\frac{۸}{۱۲۵}$

هـ)

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
y	۱۱	۲	−۱	۲	۱۱	۲۶

۴ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ قرار دارند.

الف) (۱,۰) ب) (۳,۱) ج) (۰,۱)

د) $(\sqrt{۳}, \frac{۱}{۳})$ هـ) (۱,۳) و) $(-۱, \frac{۱}{۳})$

۵ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\sqrt{۵}\,,\,\frac{۱}{۲})$ روی نمودار $y=۵^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار $y=۱۰^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۱۰)$ است.

ج) دامنهٔ توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ مساوی هستند.

د) محل تقاطع نمودار $y=۶^x$ بامحور xها، نقطهٔ $(۶,۰)$ است.

۶ معادلات ونامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲^۲}$

ب) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{۲y+۱}$

پ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^۳}$

ت) $۵^{۲x+۳}\leq ۱۲۵$

ث) $۳^{۶x-۵}>۸۱$

ج) $۴^{۲a-۶}\leq ۱۶^{۳a-۱}$

چ) $۳^{۳x+۲}>۲۷^{۲x-۱}$

ح) $(\frac{۱}{۳})^{۲x-۳}\geq ۳^{-x}$

خ) $(\frac{۱}{۵})^{n}<(\frac{۱}{۲۵})^{۲n-۱}$

درس دوم

تابع لگاریتمی و لگاریتم

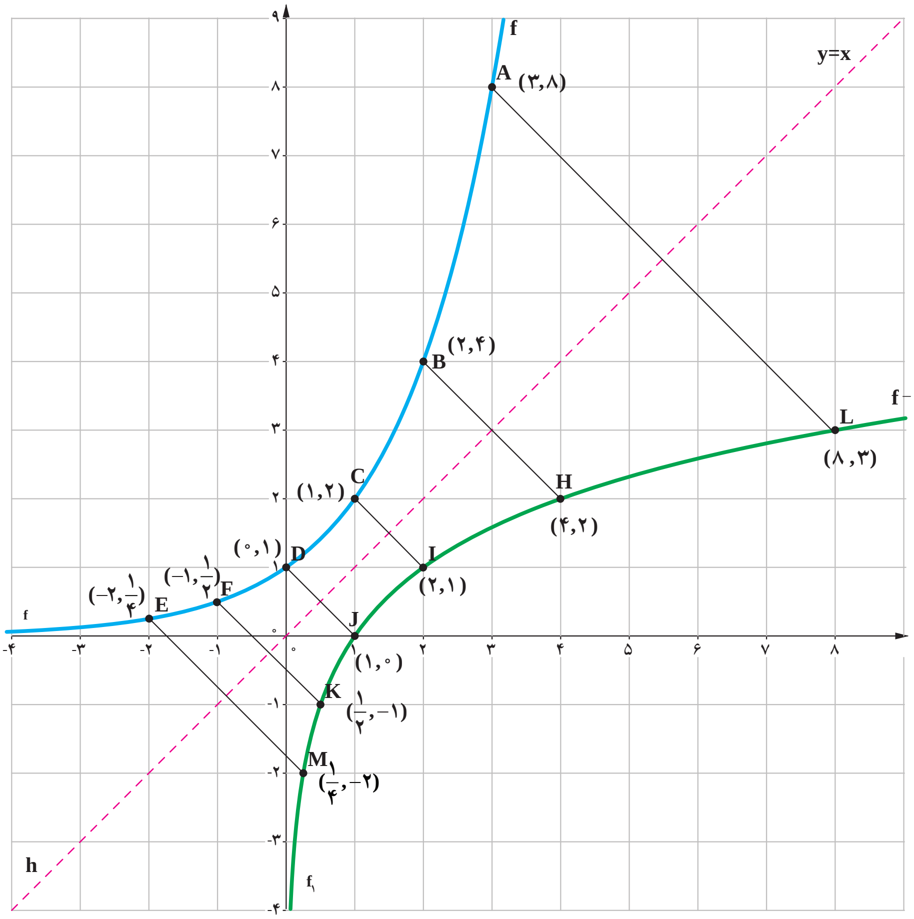
بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در بر می‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد و یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی و ... مشهود است.

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

تابع لگاریتمی

فعالیت کلاسی ۱

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و نمودار آن آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید این تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. نمودار این تابع f و وارون آن f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط y=x قرینه هستند.



نمودار (۱)

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار (۱) را به‌دست آورید.

....

۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار (۱) ،جاهای خالی را تکمیل کنید.

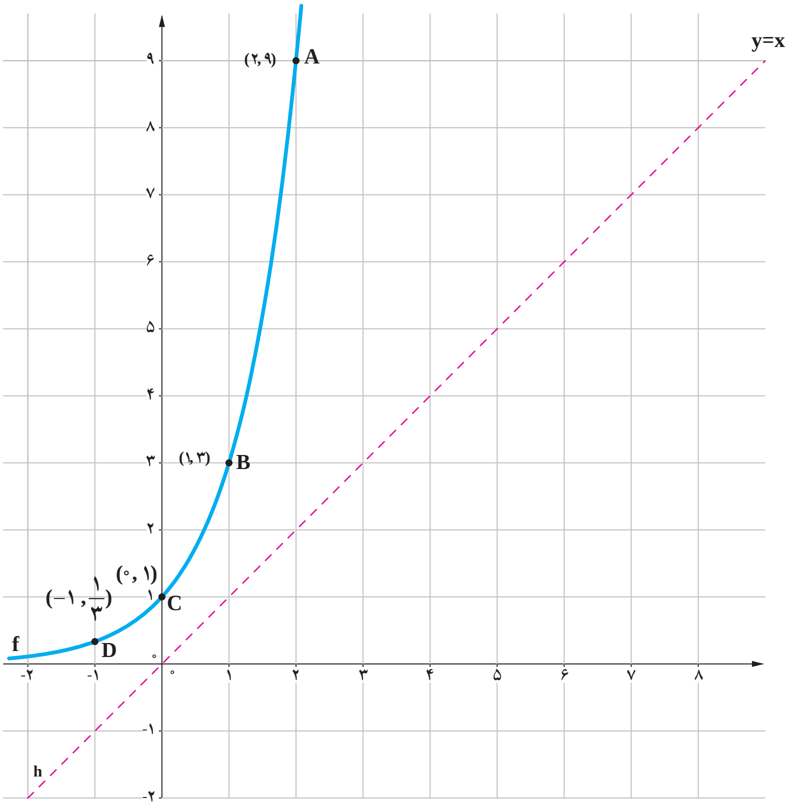
۱) $f(-۲)=\frac{۱}{۴}$ ۳) $f(-۱)=$ .... ۵) $f(۰)=$ .... ۷) $f(۲)=$ ....

۲) $f^{-۱}(\frac{۱}{۴})=$ ...... ۴) $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=$ .... ۶) $f^{-۱}(۱)=$ .... ۸) $f^{-۱}(۴)=$ ....

کار در کلاس ۱

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



نمودار (۲)

۲ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

....

۳ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار (۲)، جاهای خالی را تکمیل کنید.

۱) $f(-۲)=\frac{۱}{۹}$ ۳) $f(۰)=$ .... ۵) $f(۱)=$ .... ۷) $f($.......$)=۹$

۲) $f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=$ .... ۴) $f^{-۱}(۱)=$ .... ۶) $f^{-۱}($.......$)=۱$ ۸) $f^{-۱}(۹)=$ ....

تذکر

در کار در کلاس ۱، $f^{-1}(x)$ را به صورت $\log_3 x$ (می‌خوانیم لگاریتم x در مبنای ۳) نشان می‌دهیم و مثلاً تساوی $f^{-1}(\frac{1}{9})=-2$ به معنای آن است که مقدار عددی لگاریتم $\frac{1}{9}$ در مبنای ۳ برابر ۲− است، یعنی : $\log_3(\frac{1}{9})=-2$

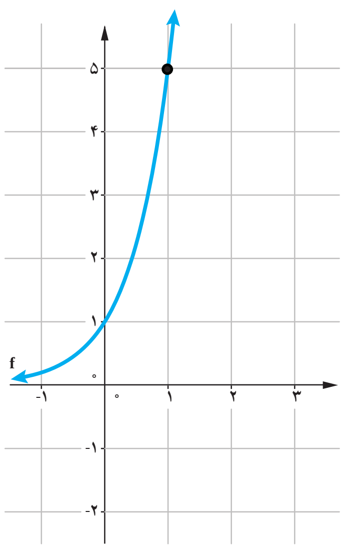
تعریف : وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به‌صورت $\log_a x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم : لگاریتم x در مبنای a.

تذکر

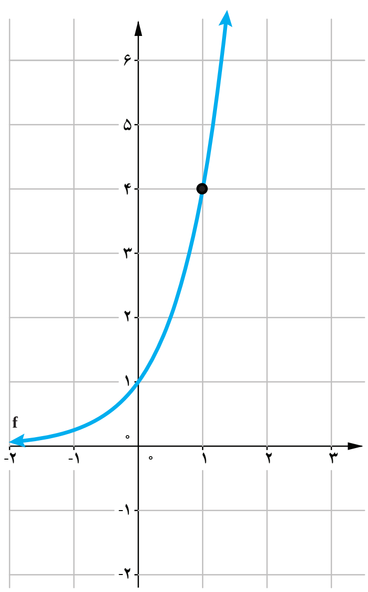
اگر $f(x)=a^x$ آنگاه $f^{-1}(x)=\log_a x$ و اگر $f(x)=\log_a x$ آنگاه $f^{-1}(x)=a^x$. در تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$، a همواره عددی مثبت و مخالف ۱ است، در تابع لگاریتمی با ضابطهٔ $y=\log_a x$ نیز a همواره عددی مثبت و مخالف ۱ است همچنین مقادیر تابع نمایی همواره مثبت است بنابراین مقدار x نیز در $\log_a x$ همواره مثبت است.

کار در کلاس ۲

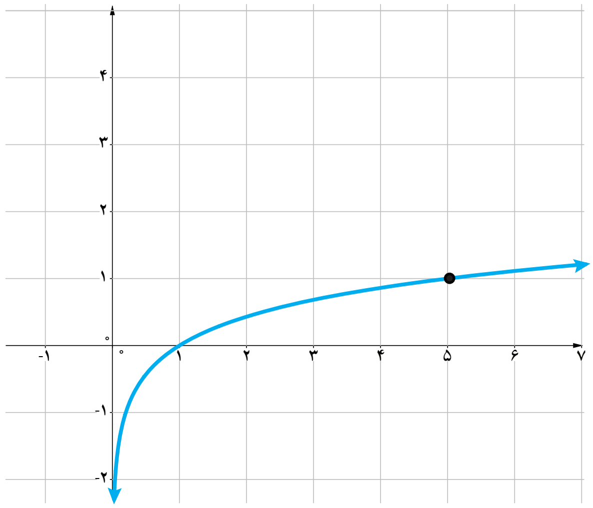
در شکل‌های زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $f(x)=4^x$ و $f(x)=5^x$ و وارون آنها رسم شده است. نمودار هر کدام از این توابع و وارون آنها را مشخص کنید و ضابطهٔ توابع وارون آنها را بنویسید.



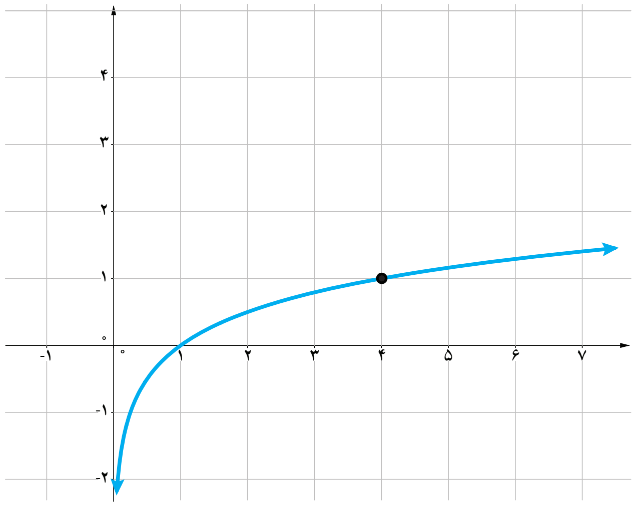
(۱)



(۲)



(۳)

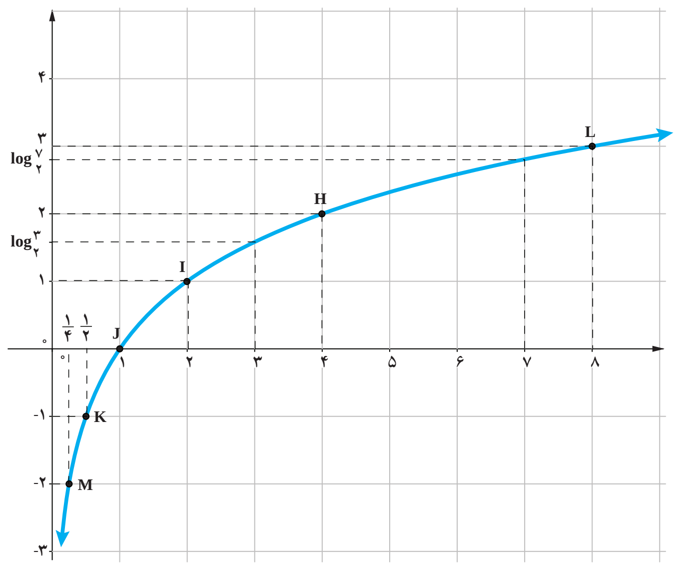


(۴)

لگاریتم یک عدد

فعالیت کلاسی ۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید :



نمودار (۳)

۱ با توجه به نقاط مشخص شده روی نمودار (۳) جاهای خالی را پر کنید.

۱) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ ۲) $\log_2 (\frac{1}{2}) =$ .... ۵) $\log_2 8 =$ ....

۳) $\log_2$ .... $= 0$ ۴) $\log_{\text{.....}} 4 = 2$

۲ با توجه به نمودار $\log_{۲}۳$ بین کدام دو عدد است؟ ....

۳ $\log_{۲}۷$ بین کدام دو عدد است؟ به کدام یک نزدیک تر است؟ ....

۴ مفهوم تساوی $\log_{۲}(\frac{۱}{۴}) = -۲$ چیست؟ ....

«۲ به توان -۲ برسد، عدد $\frac{۱}{۴}$ به‌دست می‌آید». حال بگویید حاصل $\log_{۲}۱۶$ را چطور می‌توانیم به‌دست آوریم؟

« می گوییم ۲ به توان چه عددی برسد و عدد .... به‌دست آید . این عدد برابر است با ....

بنابراین = $\log_{۲}۱۶$.

جملات فوق را به زبان ریاضی می نویسیم :

$$\log_{۲}۱۶ = m \quad \rightarrow ۲^{m} = ۱۶$$

۵ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

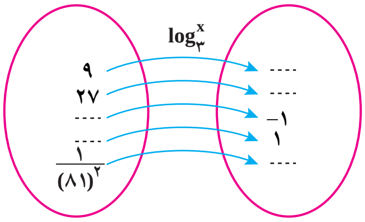
۱) $\log_{۲}\frac{۱}{۸} =$ ....

۲) $\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶ =$ ....

۳) $\log_{۳}۸۱ =$ ....

۴) $\log_{۴}۶۴ =$ ....

۵) $\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵ =$ ....



نمودار (۴)

۶ جاهای خالی را تکمیل نمایید.

> به‌طور کلی اگر $a^{y}=x$ آن‌گاه $\log_{a}x = y$ و به عکس.

کار در کلاس ۳

جدول روبه‌رو را تکمیل نمایید.

$\log_{۸}۱ = ۰ \rightarrow ۸^{۰} = ۱$	$۱۰^{۳} = ۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰ = ۳$
$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶}) = -۴ \rightarrow ۲^{-۴} =$	$۹^{\frac{۱}{۲}} = ۳ \rightarrow \log_{۹}۳ =$ ......
$\log_{۵}۱۲۵ = ۳ \rightarrow ۵^{۳} =$	$۴^{۳} = ۶۴ \rightarrow \log_{۴}۶۴ =$ ......
$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷ = -۳ \rightarrow$ ...... = ...	$۲^{۵} = ۳۲ \rightarrow$ ...... = ...

کار در کلاس ۴

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۳}x$ را با استفاده از جدول (۱) رسم کنید.

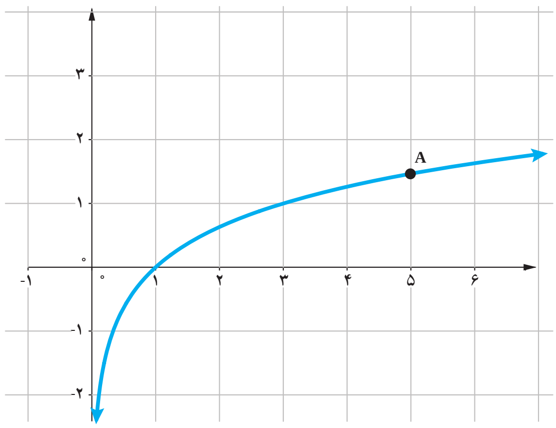
x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$f(x)=\log_{۳}x$	-۲	....	....	۱	....

$$x=\frac{۱}{۹}:\ y=\log_{۳}(\frac{۱}{۹}) \rightarrow ۳^{y}=\frac{۱}{۹} \rightarrow ۳^{y}=۳^{-۲} \rightarrow y=-۲$$

$$x=۳:\ y=\log_{۳}۳ \rightarrow ۳^{y}=۳ \rightarrow ۳^{y}=۳^{۱} \rightarrow y=۱$$

۲ دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید. ....

۳ مقدار تقریبی $\log_{۳}۵$ را به‌دست آورید.



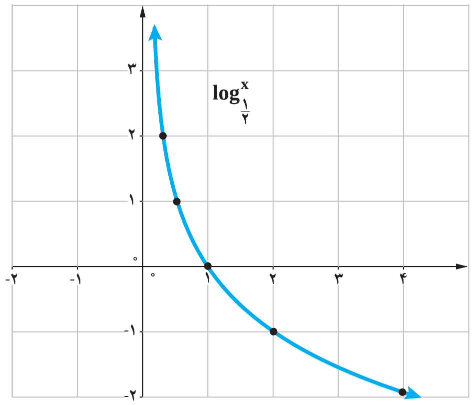
کار در کلاس ۴

۱ نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ را در نظر بگیرید.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
$y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$	۲	۱	۰	-۱	-۲

۲ دامنه و برد این تابع را با توجه به نمودار آن به‌دست آورید. ....

۳ مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.



۱ـ $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}) \sim$

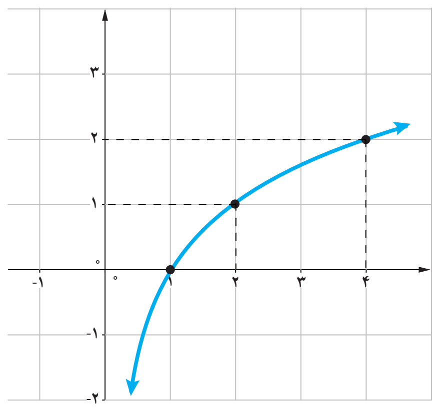
۲ـ $\log_{0/5}(3/5) \sim$

۳ـ $\log_{\frac{1}{2}}(6) \sim$

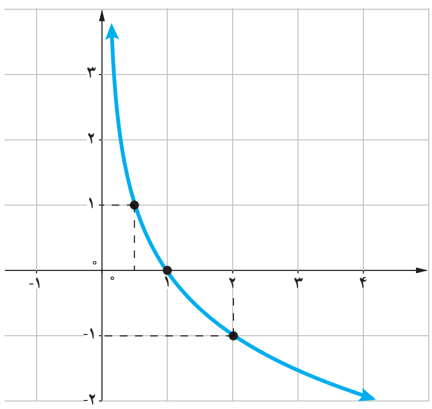
کار در کلاس ۵

نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.

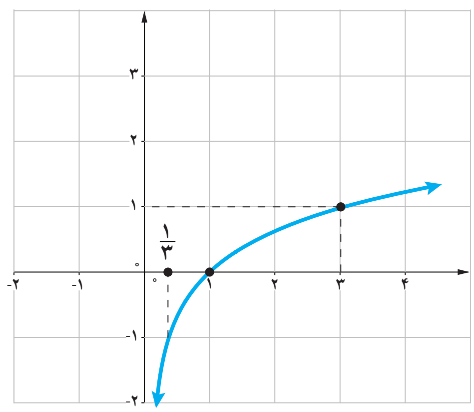
ب)



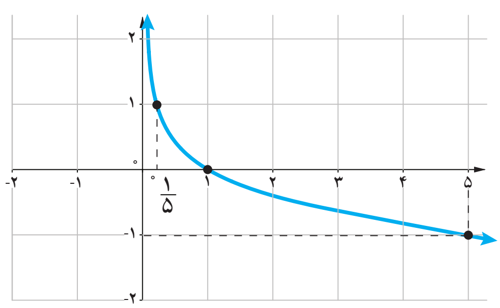
الف)



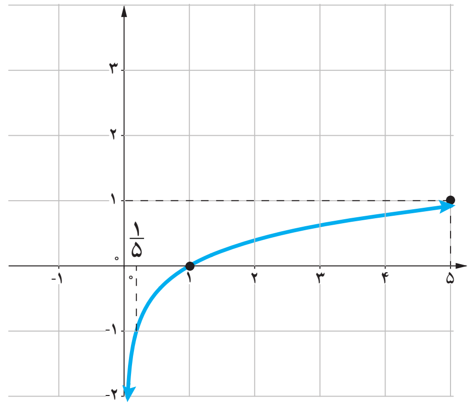
ت)



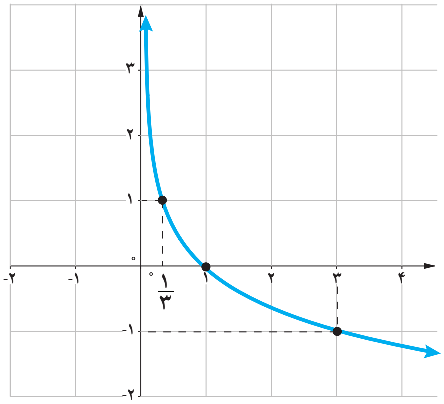
پ)



ج)



ث)



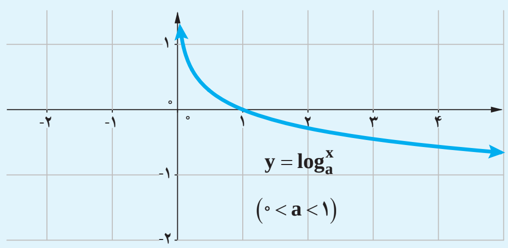
تذکر

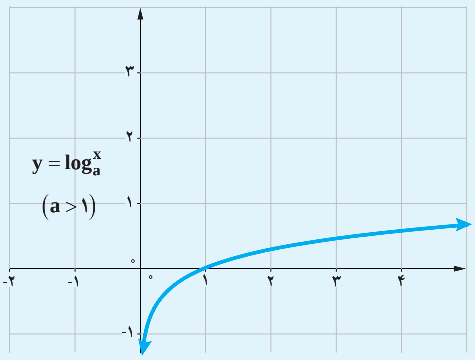
اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد داریم : $a^{\circ}=1$ بنابراین همواره :

$$\log_a 1 = 0$$

یعنی تمام نمودارهای لگاریتمی از نقطهٔ (۰ و ۱) عبور می‌کنند.

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی به صورت زیر هستند :





فعالیت کلاسی ۳

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a > 1)$، اعداد حقیقی مثبت و برد آن ……… است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$، بازه ……… و برد آن ……… است.

۳ نمودار دو تابع قسمت ۱ و ۲ محور xها را در نقطهٔ ……… قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، ۱-۱ ……… زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را ……… قطع می‌کند.

۵ وارون تابع نمایی، تابع ……… است و وارون تابع لگاریتمی، تابع ……… است.

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود یعنی به جای $\log_{10} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت کلاسی ۴

۱ اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a (\frac{1}{a}) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq 1)$ داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات:

$$\log_c a = m \;,\; \log_c b = n \rightarrow c^m = \ldots\ldots \;, c^n = \ldots\ldots \rightarrow c^m \times c^n = c^{\cdots} = \ldots\ldots$$

از طرفی $\log_c ab = t \rightarrow c^{\cdots} = ab \rightarrow c^t = c^{m+n} \; t = m+n \rightarrow \ldots\ldots \log_c a + \ldots\ldots$

مثال:

$$\log_{10} 100 = \log_{10}(4 \times 25) = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$$

۳ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq 1)$ داریم:

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات:

$$\log_c (\frac{a}{b}) + \log_c b \underset{=\!=}{\text{طبق ۲}} \log_c (\frac{a}{b}) \times b = \log_c a$$

$$\rightarrow \log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log_{10} 2 \approx 0/3$ ، مقدار $\log_{10} 5$ را محاسبه کنید. می‌دانیم $\log_{10} 10 = 1$ و نیز $\log_{10} 10 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 2 + \log_{10} 5$. بنابراین:

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = 1 \rightarrow \log_{10} 5 \approx 1 - 0/3 = 0/7$$

۴ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b\cdots b}^{\text{n بار}} = \underbrace{\log_a b + ... + \log_a b}_{\text{n بار}} = n\log_a b$$

کار در کلاس ۶

اگر $\log^{۲} \approx ۰/۳$ و $\log^{۳} \approx ۰/۳$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log^{۱۲} =$ ....

۲) $\log^{۰/۷۵} =$ ....

۳) $\log^{\sqrt{۵}} =$ ....

۴) $\log^{\frac{۲۵}{۱۸}} =$ ....

۵) $\log^{\sqrt[۳]{۶}} =$ ....

۶) $\log^{\frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}}} =$ ....

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلاتی که شامل لگاریتم است می‌توانیم از ویژگی‌های لگاریتم و یا تبدیل آن به تساوی نمایی استفاده کنیم.

مثلاً برای حل معادلهٔ لگاریتمی $\log_۲ x = ۵$ می‌توان نوشت : $x = ۲^۵ = ۳۲$

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است : «لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اختر شناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است.»

کار در کلاس ۷

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_۵ x = ۳$

۲) $\log_۲ (۲x + ۱) = ۳$

۳) $\log_۳ ۲۴۳ = ۲x + ۱$

۴) $\log_۳ (x - ۱) = ۴$

ممکن است در حل معادلات لگاریتمی در طرفین تساوی لگاریتم داشته باشیم، مثلاً :

$$\log_۳ ۲x - ۱ = \log_۳ x$$

به‌طور کلی داریم : اگر $a>۰$ و $a \neq ۱$، آن‌گاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان تساوی $x=y$ را نتیجه گرفت و به عکس.

فعالیت کلاسی ۵

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_۵(x+۶) = \log_۵(۲x-۳) \rightarrow x+۶ = ۲x-۳ \rightarrow x=۹$

که $x=۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۲ $\log_۵(x+۶) + \log_۵(x+۲) = ۱ \rightarrow \log_۵\left[(x+۶)(x+۲)\right] = ۱$

$\rightarrow (x+۶)(x+۲) = ۵^۱ = ۵ \rightarrow x^۲+۸x+۱۲=۵$

$\rightarrow x^۲+۸x+۷=۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱)=۰ \rightarrow \underset{\text{غ ق ق}}{x=-۷}$ یا $\underset{\text{ق ق}}{x=-۱}$

۳ $\log_۴(x+۲) = \log_۴ ۸ \rightarrow x+۲=۸ \rightarrow x=\cdots$

۴ $۳\log_۲ x = -\log_۲ ۲۷ \rightarrow \log_۲ x^۳ = \log_۲(۲۷)^{\cdots} \rightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots$

۵ $\log x + \log(x+۱۵) = ۲ \rightarrow \log[x(x+۵)] = \log \cdots\cdots \rightarrow \cdots\cdots$

کار در کلاس ۸

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log(۲x) - \log(x-۳) = ۱$

۲ $\log_۳(x+۱) + \log_۳(x+۴) = ۲$

تمرین‌های درس دوم

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d \quad (a,b,c,d \in IR^+, c\neq ۱)$

ب) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \quad (a,b,c \in IR^+, b,c\neq ۱)$

پ) $a^{\log_a b} = b \quad (a,b \in IR^+, a\neq ۱)$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۷ \sqrt[۵]{۴۹}$ ب) $\log_۳ ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$

۳ اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_۴(\frac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به‌دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(۲, ۲)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(-۴, \frac{۱}{۲})$عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x \; (۰ < a < ۱)$ از نقطهٔ $(۱, ۰)$ عبور می‌کند.

۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۵(p^۲ - ۲) = \log_۵ p$ ب) $\log_۳(x^۲ - ۱۵) = \log_۳ ۲x$

پ) $\log_{۱۴}(m^۲ - ۳۰) - \log_{۱۴} m = ۰$ ت) $\log_۲(۱۲b - ۲۱) - \log_۲(b^۲ - ۳) = ۲$

ث) $\log_۲(۱۲b - ۲۱) - \log_۲(b^۲ - ۳) = ۲$

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. با استفاده از انتقال نیز می‌توان نمودار برخی از توابع نمایی و لگاریتمی را رسم کرد.

۱ــ انتقال عرضی و طولی

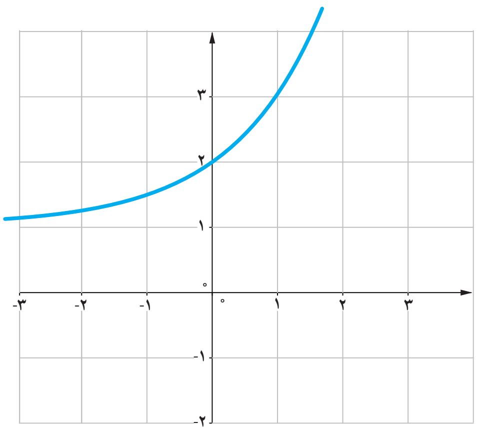
در سال دهم، انتقال نمودار توابع را در راستای محور عرض‌ها و طول‌ها فرا گرفتیم که با استفاده از آن می‌توانیم فعالیت زیر را انجام دهیم.

فعالیت کلاسی ۱

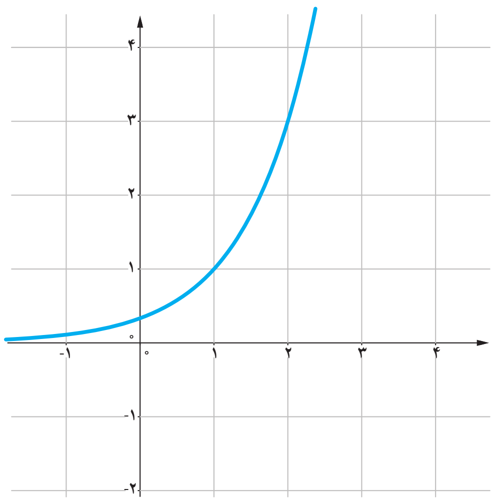
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $f(x)=2^x+1$ ب) $g(x)=\log(x-1)$

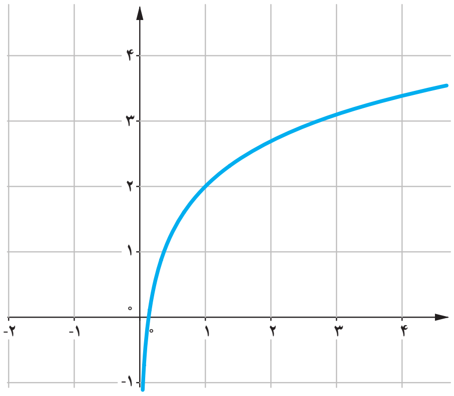
پ) $h(x)=2+\log x$ ت) $i(x)=3^{x-1}$



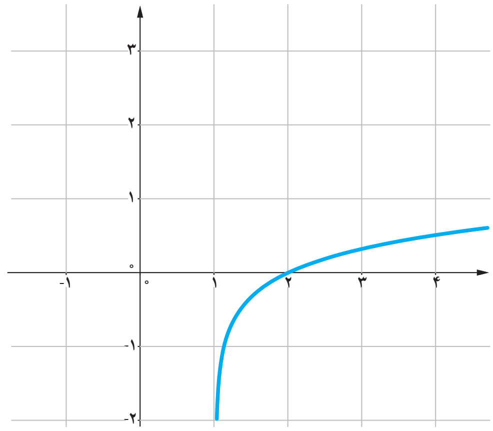
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۲ــ بازتاب نسبت به محور yها

فعالیت کلاسی ۲

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = ۲^x$ و $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه هستند؟.....................

۳ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$ به تابع با ضابطهٔ ..... = y یا همان ..... =y دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ ....

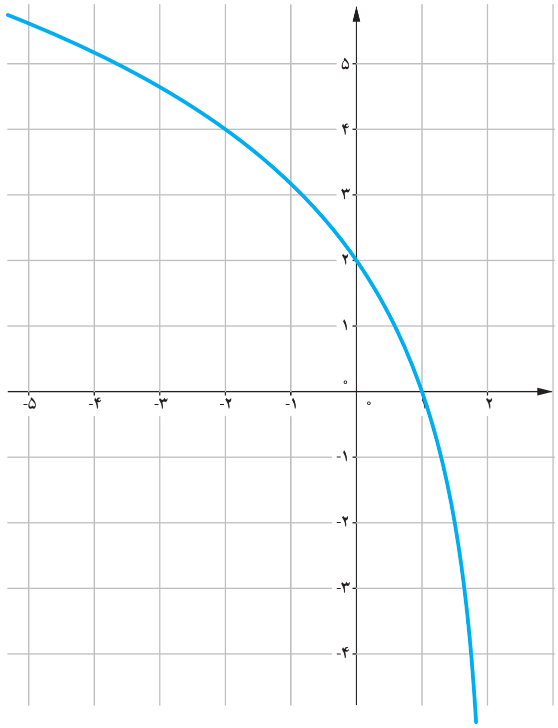
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه هستند مثال بزنید.....................

....

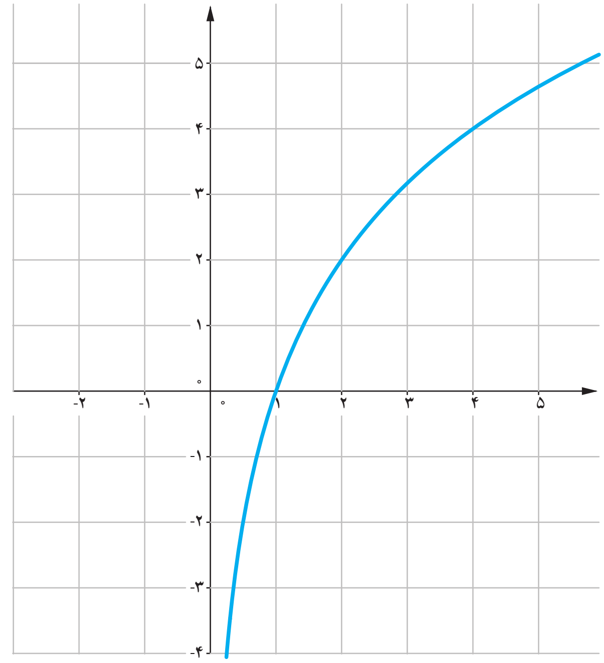
نمودار توابع با ضابطهٔ $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ $(a > ۰)$ نسبت به محور yها قرینه هستند.
آیا در مورد توابع لگاریتمی نیز چنین است؟

کار در کلاس ۱

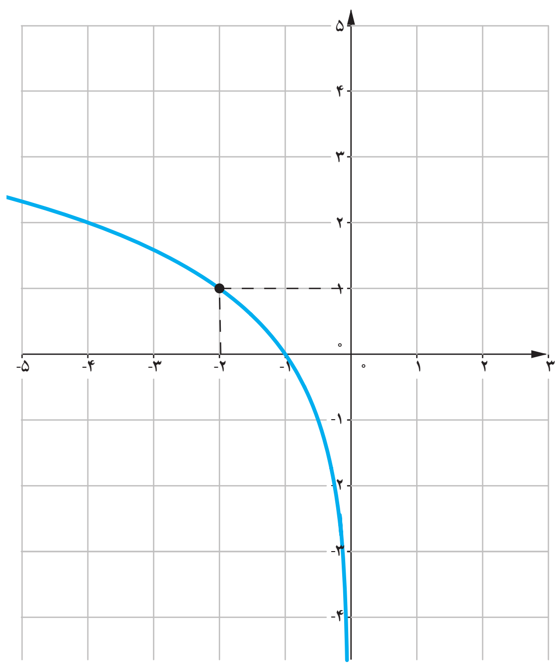
کدام یک از نمودارهای زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{۲}(-x)$ است؟ دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. ....



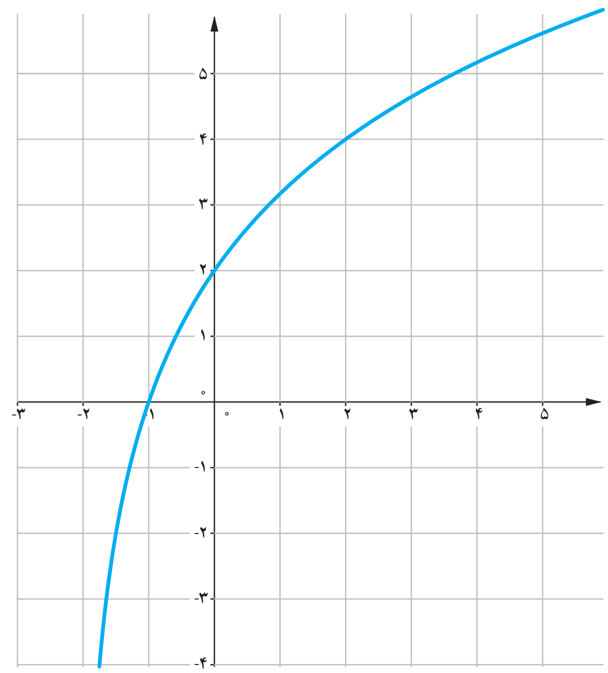
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۳ــ بازتاب نسبت به محورxها

فعالیت کلاسی ۳

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ را با استفاده از نقاط جدول زیر رسم کرده‌ایم.

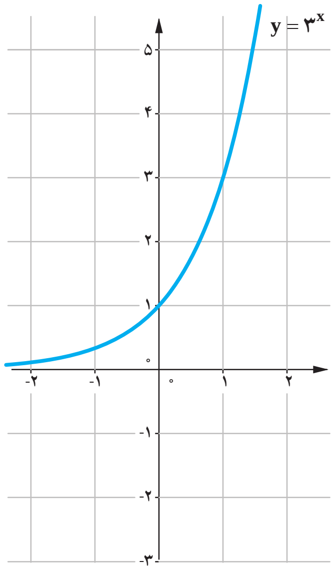
الف) عرض نقاط را قرینه کنید و نمودار جدیدی رسم کنید.

ب) ضابطهٔ تابع جدید را حدس بزنید.

....

پ) نمودار این دو تابع نسبت به محور .... ها قرینه هستند.

x	−۲	−۱	۰	۱
$y=۳^x$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳
y=				

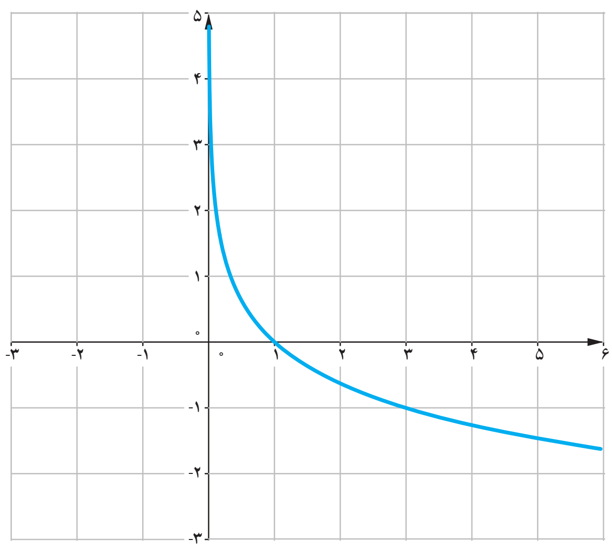


ت) دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

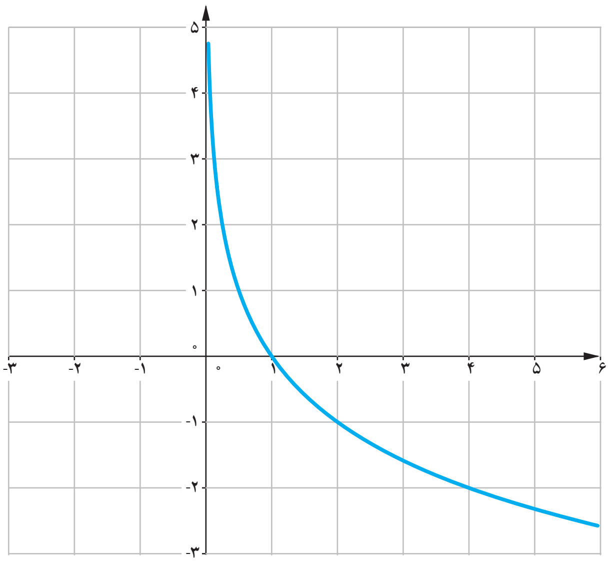
نمودار توابع با ضابطهٔ $y= a^x$ و $y= -a^x$ $(a>۰)$ نسبت به محور xها قرینه هستند. توابع با ضابطه‌های $y = \log_a x$ و $y = -\log_a x$ نیز نسبت به محور طول‌ها قرینه هستند.

کار در کلاس ۲

کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع با ضابطهٔ $y = -\log_a x$ است؟



(ب)



(الف)

کار در کلاس ۳

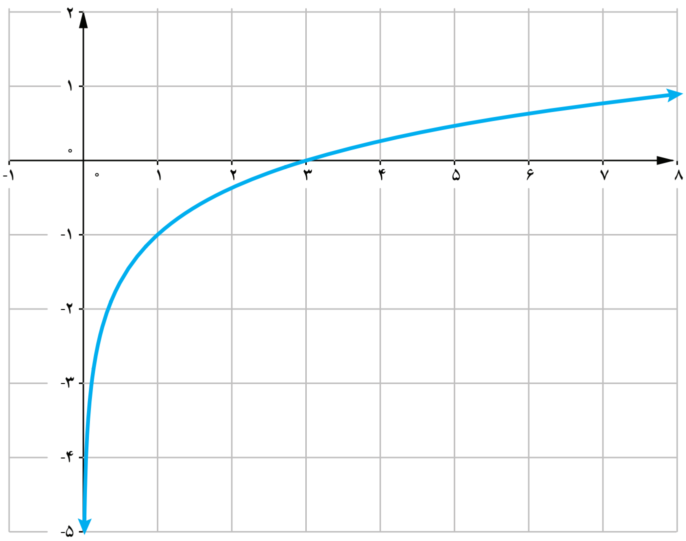
مشخص کنید کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_{۳}(x - ۱)$ ۲) $y = -\log_{۳}(-x)$

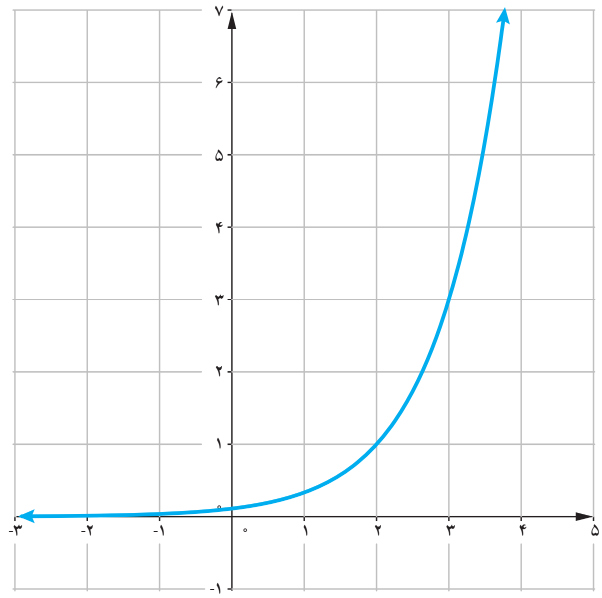
۳) $y = ۳^{x} + ۱$ ۴) $y = ۱ - ۳^{x}$

۵) $y = \log_{۳} x - ۱$ ۶) $y = ۱ - \log_{۳} x$

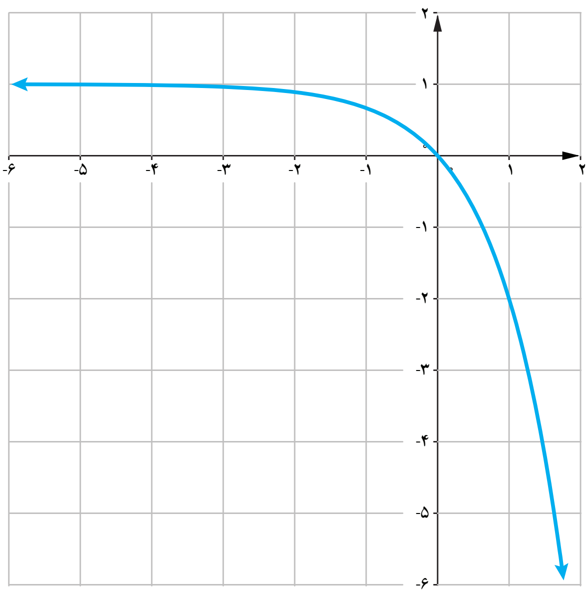
۷) $y = -۳^{-x}$ ۸) $y = ۳^{x-۲}$



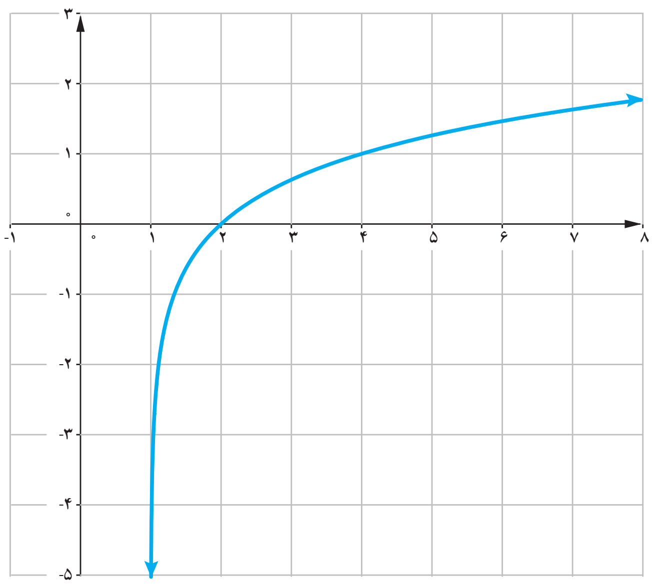
(الف)



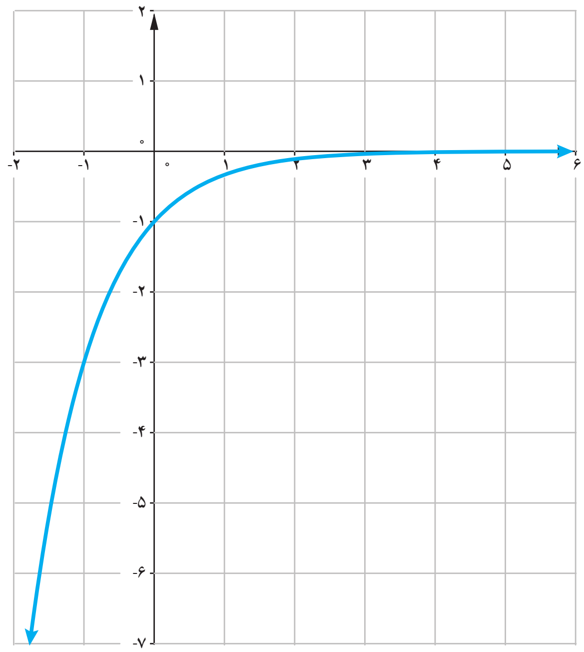
(ب)



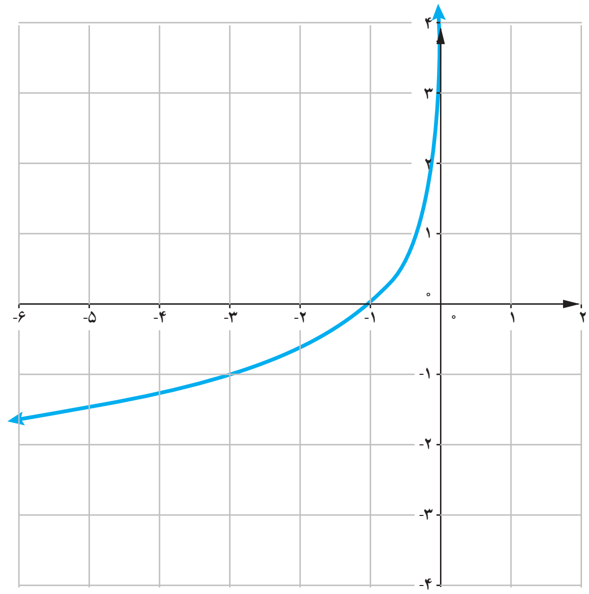
(پ)



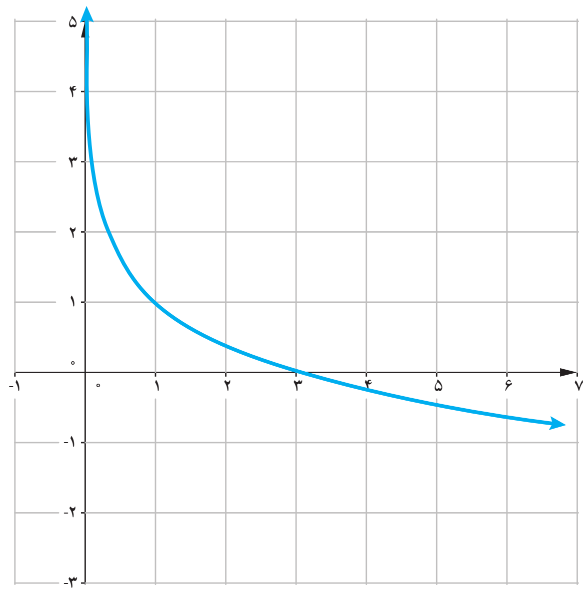
(ت)


۲
۱
۰
-۲ -۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶
-۱
-۲
-۳
-۴
-۵
-۶
-۷

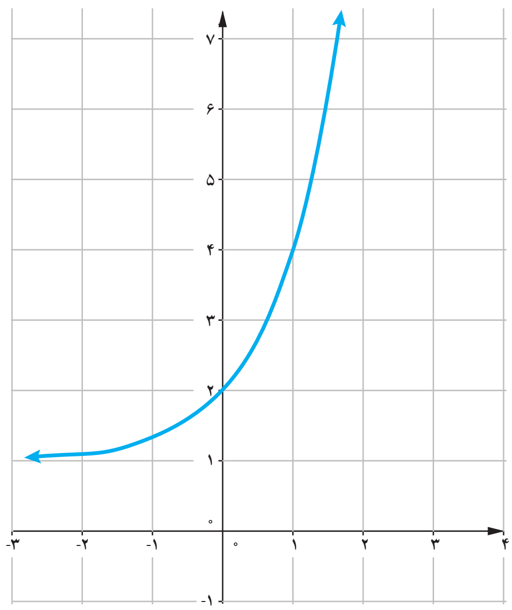
(ث)


۴
۳
۲
۱
۰
-۶ -۵ -۴ -۳ -۲ -۱ ۰ ۱ ۲
-۱
-۲
-۳
-۴

(ج)


۵
۴
۳
۲
۱
۰
-۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷
-۱
-۲
-۳

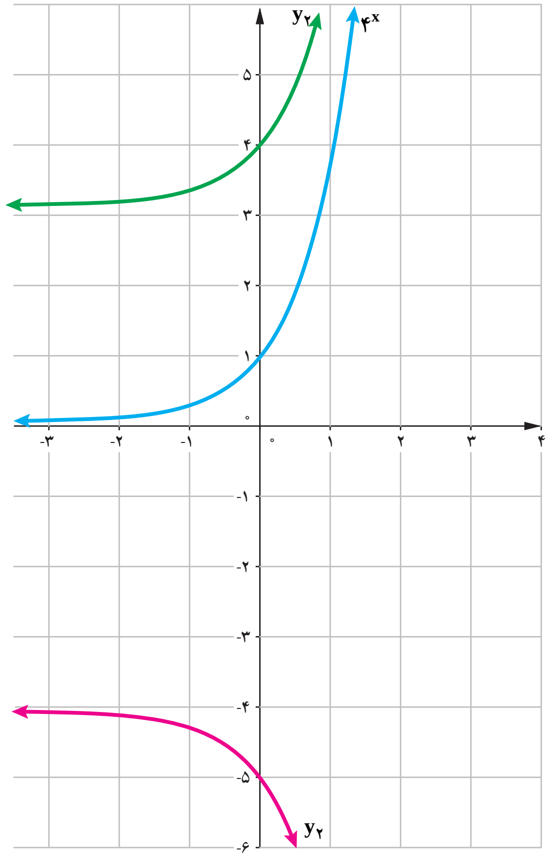
(چ)

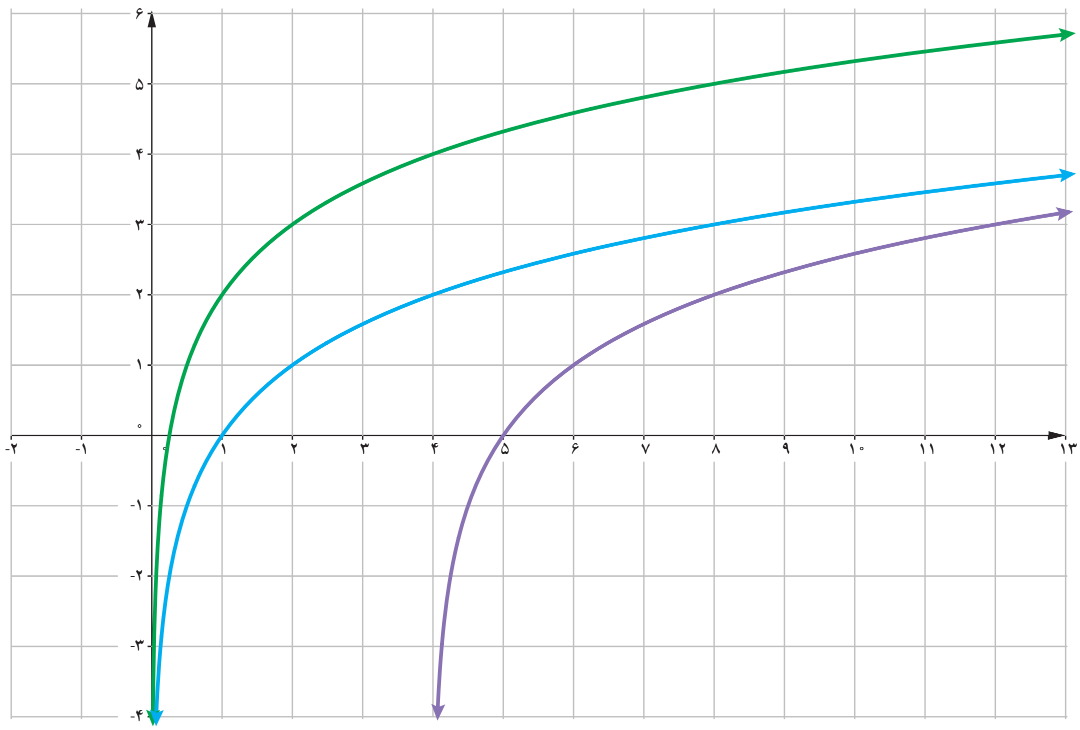

۷
۶
۵
۴
۳
۲
۱
۰
-۳ -۲ -۱ ۰ ۱ ۲ ۳ ۴
-۱

(ح)

کار در کلاس ۴

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. در اثر این زلزله، ۹۰ درصد از سازه‌های شهر بم به‌کلی تخریب شدند و ارگ بم که بزرگ‌ترین سازهٔ گلی جهان با ۲۵۰۰ سال قدمت بود، به‌کلی نابود شد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مصیبت‌بار چه‌قدر بوده است؟

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \rightarrow$

$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,(۶/۶)$

$\rightarrow \log E = ۲۱/۷ \rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}\ \mathrm{Erg}$

کار در کلاس ۵

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد رخ داد و بیش از ۳۵۰۰۰ کشته و ۶۰۰۰۰ زخمی به جای گذاشت. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مرگبار را محاسبه کنید.

....

....

....

....

یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبهٔ PH یک محلول است. PH، معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$PH = -\log_{۱۰}{}^{[H^+]}\quad PH = -\log_{۱۰}[H^+]$$

که $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را برحسب واحد mol/lit نشان می‌دهد.

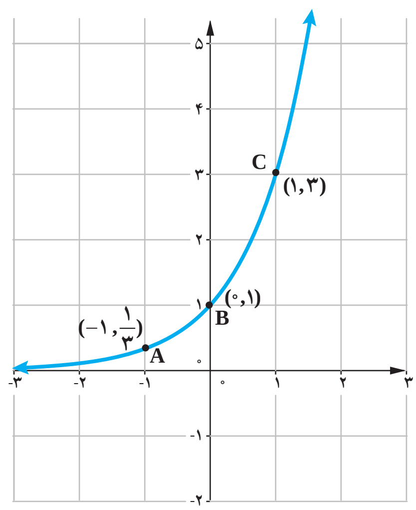
کار در کلاس ۶

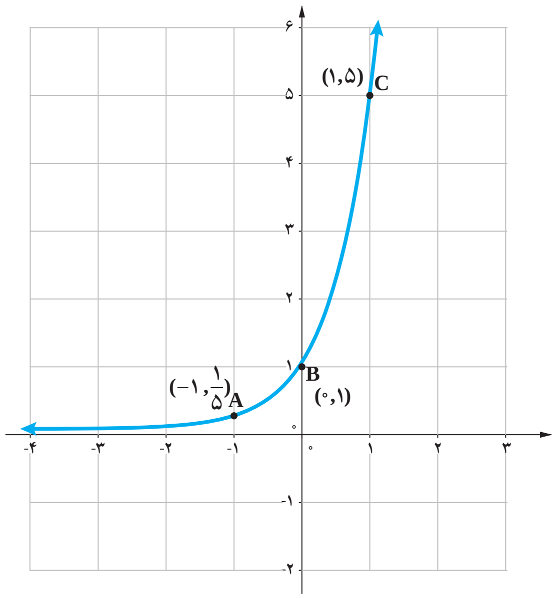
PH محلولی چقدر است اگر $[H^+]$ برابر ۰/۱ باشد؟

اگر $[H^+]$ برابر ۰/۰۱ باشد PH چقدر می شود؟

تمرینهای درس سوم

۱ ضابطهٔ توابع نمایی که نمودار آنها رسم شده است را به‌دست آورید.





۲ فرض می‌کنیم $g(x) = ۴^x + ۲$.

الف) $g(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $g(x) = ۶۶$، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x - ۱$ را در بازهٔ $[-۲و۲]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -۲^{-x} + ۱$ ب) $y = -\log_{۱}(x-۱)$

۵ در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم برابر $۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$ مول بر لیتر است. PH آب پرتقال چقدر است؟ $(\log ۲۹ = ۱/۴۶)$

۶ در محلول خنثی، PH برابر ۷ می‌باشد. مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی چند مول بر لیتر است؟